確率論入門
6月17日 小テスト解説.

一様分布 X の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A} & (x \in [A,B]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と与えられている.

(1) $E(X^k)$ を求めよ.

(2) $V(X)$ を求めよ.

---

(1)
$$E(X^k) = \int_A^B \frac{1}{B-A} x^k \, dx$$
$$= \frac{1}{B-A} \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1} \right]_A^B$$
$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{B-A} \left(B^{k+1} - A^{k+1} \right)$$

(2)
$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{B-A} (B^3 - A^3) - \left\{ \frac{1}{2}(B+A) \right\}^2$$
$$= \frac{1}{3}(B^2 + BA + A^2) - \frac{1}{4}(B^2 + 2AB + A^2)$$
$$= \frac{1}{12}(B-A)^2$$

重積分

$$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

の $[a, b] \times [c, d]$ 上の重積分とは

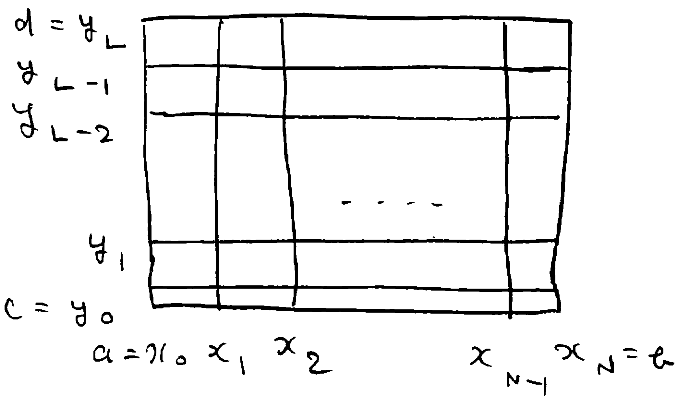
$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy$$

と記し、以下の極限である。右下図のように分割する。

(ξ_i, η_j)

$\in [x_{i-1}, x_i]$

$\times [y_{j-1}, y_j]$



を選び

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\longrightarrow \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$(\Delta \to +0)$$

但し $\Delta = \max\left\{\max_i (x_i - x_{i-1}), \max_j (y_j - y_{j-1})\right\}$

を分割の細かさという。計算は次のFubiniの

定理を用いる。

定理 ある条件の下で

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

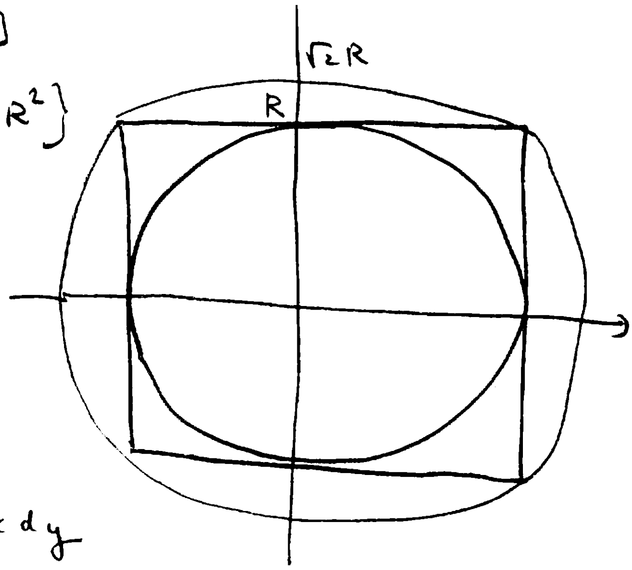
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$ を計算しよう.

$$I_R = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$$

とおく。上の Fubini の定理を用いると

$$I_R^2 = \int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



$$D_R = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq R^2\}$$

とする。

$$J_R = \int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

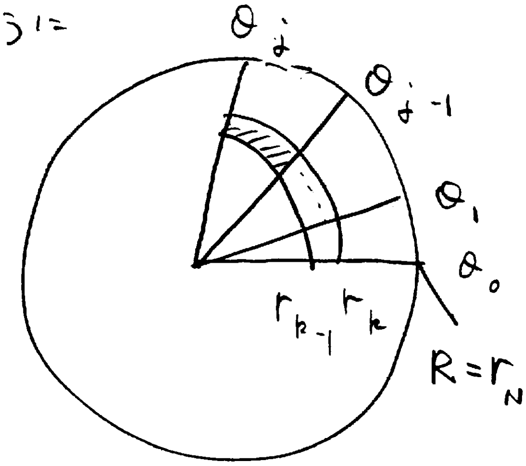
$$\overset{定義}{=} \int_{[-R,R]\times[-R,R]} \chi_{D_R}\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

と定める。ここで

$$\chi_{D_R}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in D_R \\ 0 & (x,y)\notin D_R \end{cases}$$

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

を別の形で計算しよう。右図のように
D_R を分割する。



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標で表すと

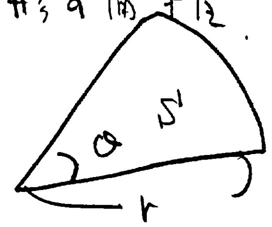
$$\left\{ (x,y);\ \begin{array}{l} r_{k-1} \le r \le r_k \\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j \end{array} \right\}$$

の面積は

$$\frac{1}{2}(r_k^2 - r_{k-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})$$

である。この分割でのRiemann和は

扇形の面積



$$S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

$$\sum_{j,k} e^{-\left(\frac{r_k+r_{k-1}}{2}\right)^2}\frac{1}{2}(r_k^2-r_{k-1}^2)(\theta_j-\theta_{j-1})$$

$$= \sum_{j,k} e^{-\left(\frac{r_k+r_{k-1}}{2}\right)^2}\frac{1}{2}(r_k+r_{k-1})$$

$$\times\ (r_k-r_{k-1})(\theta_j-\theta_{j-1})$$

$$\longrightarrow \int_{[0,2\pi]\times[0,R]} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$J_R = \int_{[0,2\pi]\times[0,R]} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^R \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)'$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2} \right) = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right)$$

である。ここで

$$\begin{array}{ccccc} J_R & \leq & I_R^2 & \leq & J_{\sqrt{2}R} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi & & & & \pi \end{array}$$

より $I_R^2 \longrightarrow \pi$

を得るので $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

が従う。

正規分布に関連する積分

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}}$$

を前提としよう。（後に示す。）

$$N_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を標準正規分布の密度関数と呼ぶ。

実際 $\int_{-\infty}^{+\infty} N_{0,1}(x)\,dx = 1$

が成立する。

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, N_{0,1}(x)\,dx = 0$$

は $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ が奇関数であることから従う。

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるので

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (-x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$\underset{(*)}{=} 1.$$

(*) $\lim_{R\to+\infty} \frac{R}{e^{\frac{R^2}{2}}} = 0$ に注意しよう。

より
$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 1$$

が分る。

$$N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

を正規分布の密度関数とよぶ。

$$z = \frac{(x-m)}{\sigma}$$

と変数変換をすると $dz = \frac{1}{\sigma} dx$ より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m,\sigma}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

が分る。

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, N_{m,\sigma}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{(x-m)+m\} N_{m,\sigma}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + m \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m,\sigma}(x)\, dx}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz + m$$

$$= m \quad \left(z e^{-\frac{z^2}{2}} \text{ が奇関数であるので } \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \right)$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} dz$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \sigma^2 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1\right.$$ を上で

示している。)

X が確率密度 $f(x)$ の確率変数，Y が確率密度 $g(x)$ の確率変数とする。X と Y が独立のとき

(P.S.)

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b) P(c \leq Y \leq d)$$

が成立するとき $Z = X + Y$ は確率密度

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\, dy$$

を持つことが知られている。(離散的な場合との類似に注意しよう。)

$$f(x) = N_{m_1, \sigma_1}(x), \quad g(x) = N_{m_2, \sigma_2}(x)$$

の場合を計算してみよう。

確率入門 6月27日 じゅぎょう.

確率変数 X と Y がそれぞれ確率密度 $f(x)$, $g(x)$ を持つとする.

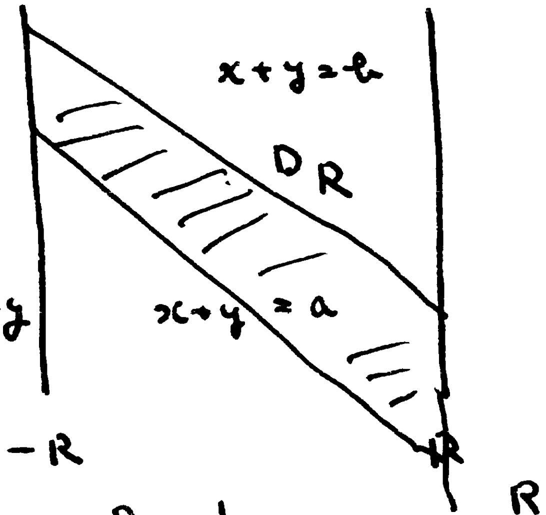
X と Y が独立であるとは

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d)$$
$$= P(a \leq X \leq b) \cdot P(c \leq Y \leq d)$$

が成立することである. このとき.

$Z = X+Y$ とすると

$$P(a \leq Z \leq b)$$
$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{D_R} f(x)\, g(y)\, dx\,dy$$



$D_R = \{(x,y);\ a \leq x+y \leq b,\ |x| \leq R\}$

ここで

$$\int_{D_R} f(x)\, g(y)\, dx\,dy$$
$$= \int_{-R}^{R} \left(\int_{a-x}^{b-x} g(y)\, dy \right) dx$$
$$= \int_{-R}^{R} \left(\int_{a}^{b} g(t-x)\, dt \right) \underbrace{\;}_{f(x)} dx$$

$y = t - x$ と変数変換 $dy = dt$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{a}^{b} g(t-x)\, dt \right) f(x)\, dx$$
$$= \int_{a}^{b} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)\, f(x)\, dx \right) dt$$

Fubini

から

$$P(a \le Z \le b)$$

$$= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x) f(x) dx \right) dt$$

から Z の確率密度関数は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x) f(x) dx$$

と計算される.

Fubini の定理.

$$\int_{I \times J} |f(x,y)| dx dy < +\infty$$

OR $\displaystyle \int_J \left(\int_I |f(x,y)| dx \right) dy < +\infty$

$$\Rightarrow \int_{I \times J} f \, dx dy = \int_J \left(\int_I f \, dx \right) dy$$

$$= \int_I \left(\int_J f \, dy \right) dx$$