離散確率空間

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$$

を集合として $(\omega_i \neq \omega_j \ (i \neq j))$

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \geqq 0$$

かつ

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

を満たしているとき

$$(\Omega, P)$$

を <u>離散的な確率空間</u> と呼ぶ

$$\Omega \xrightarrow{X = f(\omega)} \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X = f(\omega)$$

で定まる X を確率変数と呼ぶ.

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \{f(\omega_0), f(\omega_1), \cdots\} \\ &= \{f(\omega_i) ; i = 0, 1, 2 \cdots\} \\ &= \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\} \quad (\alpha_k \neq \alpha_l \ (k \neq l)) \end{aligned}$$

とすると $f(\Omega)$ も

$$g_k = P(\{\alpha_k\}) = \sum_{f(\omega_i) = \alpha_k} p_i$$

により離散的な確率空間となる. この $\{g_k\}$ を

X の <u>確率密度</u> と呼ぶ.

$$g : \Omega \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad Y = g(\omega)$$

を別の確率変数とする。

$$g(\Omega) = \{ g(\omega_i) \,;\, i = 0, 1, 2, \cdots \}$$
$$= \{ \beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots \} \quad (\beta_s \neq \beta_t) \quad (s \neq t)$$

とするとき．2次元の確率変数

$$(f, g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

が定まる．

$$r_s = \sum_{g(\omega_i) = \beta_s} p_i$$

を Y の確率密度とする。また

$$(f, g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto (f(\omega), g(\omega))$$

の同時確率密度は

$$p_{ks} = P(X = \alpha_k, Y = \beta_s)$$

のことである．このとき次の定理が成立する．

<u>定理</u>

$$\sum_{s=0}^{+\infty} p_{ks} = q_k, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ks} = r_s$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \, g_k \underset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} f(\omega_i)\, p_i$$

を X の期待値と呼ぶ。(*)は次のように示す。

$$g_k = P(X = \alpha_k) = \sum_{f(\omega_i)=\alpha_k} P(\omega_i)$$

に注意すると

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \, g_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \sum_{f(\omega_i)=\alpha_k} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(\omega_i)\, P(\omega_i)$$

$$f+g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto f(\omega) + g(\omega)$$

により $X+Y$ も離散確率変数となるが

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

が成立する。

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(f(\omega_i) + g(\omega_i) \right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} f(\omega_i)\, p_i + \sum_{i=1}^{+\infty} g(\omega_i)\, q_i \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}
$$

を得る.

定義 XとYが独立であるとは

$$P(X=\alpha_k,\ Y=\beta_s) = P(X=\alpha_k) \cdot P(Y=\beta_s)$$

が成立するときである.

定理 XとYが独立であるとき.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= E(X)\,E(Y) \\
C(X,Y) &:= E\left((X-\mu)(Y-\nu) \right) \\
&= 0 \\
V(X+Y) &= V(X) + V(Y).
\end{aligned}
$$

確率の諸概念

(Ω, P) を離散的な確率空間とする.

$\mathcal{F}$ を Ω の部分集合の全体とする. $B \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i)$$

によって事象 B が起こる確率を定義する.

(1) $P(B) \geqq 0 \quad (B \in \mathcal{F})$

(2) $P(\Omega) = 1, \quad P(\phi) = 0$

(3) $A_1, A_2, \cdots$ が互いに排反とする. すなわち

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (i \neq j)$$

とする. このとき

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

が成立する.

例1. $A \in \mathcal{F}$

$$A, \ \Omega \setminus A, \ \phi, \ \phi, \ \cdots$$

とすると

$$P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(A) + P(\Omega \setminus A)$$

$$\parallel$$

$$P(\Omega) = 1$$

から

$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

が従う.

条件付確率　$A, B \in \mathcal{F}$ かつ $P(B) > 0$ のとき

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を B が与えられた下での A の条件付確率と呼ぶ.

独立性　・$A, B \in \mathcal{F}$ が独立とは

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

・$A_1, \cdots, A_n$ が独立とは

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

定理（分割定理）

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i, \quad B_i \cap B_j = \phi \quad (i \neq j)$$

とする. このとき

$$P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

$$P(A) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right)\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A \cap B_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

レポート問題 (その1)

① 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ $(\log x = t)$

(2) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\sqrt{1-x} = t$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx$

② 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ $(x)'\log x = \log x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x e^x\,dx$ $(e^x)'x = x e^x$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x\,dx$ $\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x = x^2\log x$

(4) $\displaystyle\int_1^2 t e^{-t}\,dt$

$t(-e^{-t})'$
$= t e^{-t}$

③ 以下では $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1+t)^a = \sum_{r=0}^{+\infty} \binom{a}{r} t^r \quad (|t|<1)$$

が成立することを用いてよい。但し

$$\begin{cases} \displaystyle\binom{a}{r} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)}{r!} \\ \displaystyle\binom{a}{0} = 1 \end{cases}$$

とする。$1>p>0$, $q=1-p$ とする。

$$P(X=l) = \binom{l+k-1}{l} p^k q^l \quad (l=0,1,2,\cdots)$$

と定めると X は確率変数であることを示せ。

$$E(X), \quad V(X)$$

を求めよ。