(X, Y) 2次元の確率変数

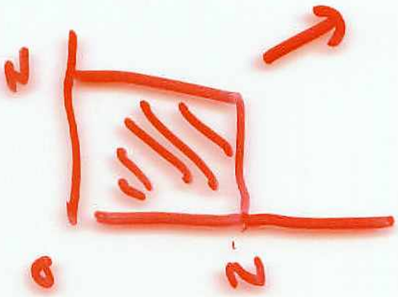
$x, y \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ given

$p_{ij} \geqq 0$, $\boxed{\sum_{i,j} p_{ij}} = 1$ が成立する とする

$$p_i = P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} < +\infty$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{0 \leq i,j \leq N} p_{ij}$$



$$\| $$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} \right)}_{= p_i} = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$$

$$p_i \geqq 0$$

X : 確率変数となる.

$$E(f(X,Y)) = \sum_{i,j} f(i,j)\, p_{ij}$$

$$\sum_{i,j} |f(i,j)|\, p_{ij} < +\infty$$

$$\sum_{i,j} |g(i,j)|\, p_{ij} < +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i,j} | f(i,j) + g(i,j) |\, p_{ij} < +\infty$$

$$E(f+g) = E(f) + E(g)$$

$$E(X) = \sum_{i,j} i\, p_{ij}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=0}^{+\infty} i\, p_i}$$

どちらかが有限だと
他方も有限 "="

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sum_{i,j} i\, p_{ij} < +\infty \text{ とする.}}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} i\, p_{ij}} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} i\, p_i$$

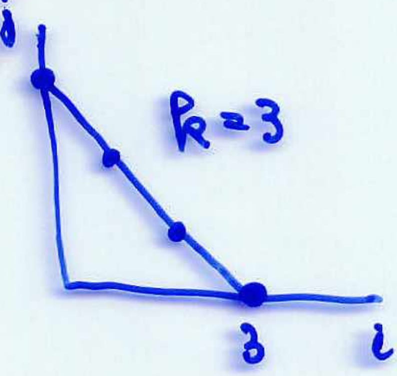
$E(X),\ E(Y) < +\infty$

$$\left(\sum_{i,j} i\, p_{ij} < +\infty,\ \sum_{i,j} j\, p_{ij} < +\infty \right)$$

$$\Longrightarrow \quad E(X+Y) < +\infty$$

$$E(X) + E(Y) = E(X+Y)$$

$Z = X + Y$ 新たな変数



$$0 \leq q_k = P(Z = k) = \sum_{i+j=k} p_{ij}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} p_{ij} = \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$\rightsquigarrow$ Z : 確率変数.

$E(X),\ E(Y) < +\infty$

$\rightsquigarrow$ $E(Z)$ も有限

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(X, Y) $\quad p_{ij} = p_i\, p'_j$

$$p_{ij} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}$$

$$p_i = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu}\right)}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

XとYは独立. $\quad \boxed{p_{ij} = p_i\, p'_j}$

$\rightsquigarrow$ X : 母数 λ の Poisson 変数

Y : ── μ の Poisson 変数.

$Z = X + Y$.

$$q_k = P(Z = k) = \sum_{i+j=k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i+j=k}\frac{\lambda^i\mu^j}{i!\,j!}k!$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i+j=k}\lambda^i\mu^{j}\,{}_kC_i \qquad j = k-i$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.$$

$\boxed{Z\text{は母数}\lambda+\mu\text{の Poisson 変数.}}$

$$\boxed{P_{ij} = P(X=i)\cdot P(Y=j)}$$

(X, Y) : 2次元の確率変数

$$P(X=i,\ Y=j) = P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

が全ての i, j で成立するとき、

X と Y は独立.

$$\begin{cases} P_{ij} = {}_{N_1}C_i\, p^i q^{N_1-i} \cdot {}_{N_2}C_j\, p^j q^{N_2-j} \\ \qquad \begin{pmatrix} p+q=1,\ p, q \geq 0 \\ 0 \leq i \leq N_1,\ 0 \leq j \leq N_2 \end{pmatrix} \\ P_{ij} = 0 \qquad (\text{other } (i, j)) \end{cases}$$

$$\sum_{i,j} P_{ij} = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} {}_{N_1}C_i\, p^i q^{N_1-i} \times {}_{N_2}C_j\, p^j q^{N_2-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_1} {}_{N_1}C_i\, p^i q^{N_1-i} \cdot \sum_{j=0}^{N_2} {}_{N_2}C_j\, p^j q^{N_2-j}$$

$$= (p+q)^{N_1} \cdot (p+q)^{N_2} = 1$$

$$P_i = P(X=i) = {}_{N_1}C_i\, p^i q^{N_1-i}$$

X : 母数 N_1, p の二項変数

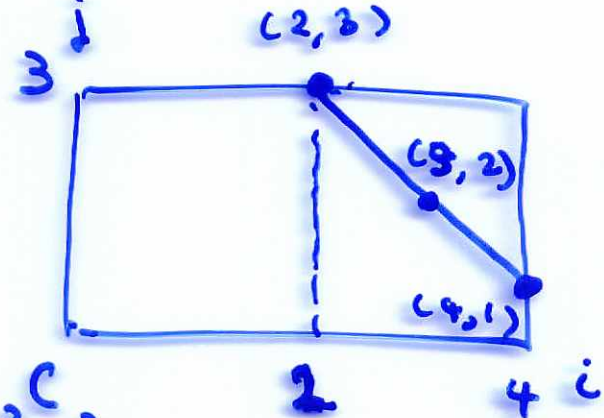
$z = x + y$.

$$q_k = P(z = k) = \sum_{i+j=k} {}_{N_1}C_i\, p^i q^{N_1-i} \times {}_{N_2}C_j\, p^j q^{N_2-j}$$

$$= \boxed{\sum_{i+j=k} {}_{N_1}C_i\ {}_{N_2}C_j} \cdot p^k q^{N_1+N_2-k}$$

$$\parallel$$

$${}_{N_1+N_2}C_k$$



$N_1 = 4$, N_2 3

$k = 5$

$${}_4C_2\ {}_3C_3 + {}_4C_3\ {}_3C_2 + {}_4C_4\ {}_3C_1 = {}_7C_5$$

---

z は 母数 $N_1 + N_2$, p の2項分布.

(X, Y) : X と Y が独立.

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)\,P(Y=j)$$

$$p_{ij} = p_i \, p'_j$$

- $E(XY) = E(X)E(Y)$

$E(X) < +\infty$, $E(Y) < +\infty$ のとき

証

$$= \sum_{i,j} ij\, p_{ij}$$

$$= \sum_{i,j} ij\, p_i p'_j = \sum_{i=0}^{+\infty} i p_i \sum_{j=0}^{+\infty} j p'_j$$

$$= \sum_i i p_i \cdot E(Y) = E(X)E(Y)$$

$< +\infty$

分散 X $E(X) = \mu < +\infty$

$E(X^2) < +\infty$

$V(X) = E((X-\mu)^2)$

$E(1) = 1$

$$(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$$

$$= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{=\mu} + \mu^2 E(1)$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

- $E(|f(x)|) < +\infty \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{+\infty} f(i) p_i$ 收敛
- $E(\lambda f(x)) = \lambda E(f(x))$

  λ : 定数.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| < +\infty \rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \text{ 收敛}$$

$$E(|f(x)|) < +\infty$$

$$E(|g(x)|) < +\infty$$

$$\Longrightarrow E(|f(x)+g(x)|) < +\infty$$

$$E(f(x)) + E(g(x)) = E(f(x)+g(x))$$

X: 母数 N, p の2項変数.

$$P(X=i) = {}_N C_i \, p^i q^{N-i}$$

Une Indication

ヒント

$$\boxed{e^{\theta i} = (e^{\theta})^i}$$

θ: 定数

$$E(e^{\theta X}) = ?$$

$$= \sum_{i=0}^{N} e^{\theta i} \, {}_N C_i \, p^i q^{N-i}$$

Xのモーメント母関数.

$$a^i b^i = (ab)^i$$