Poisson 分布　　$\lambda > 0$　パラメーター，母数．

確率変数 $X = 0, 1, 2, \cdots$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$E(X)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \cdot k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \qquad (k - 1 = l \text{ とおく})$$

$$k = 1 \Longleftrightarrow l = 0$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda$$

まとめ $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

非負整数の全体.

$\mathbb{Z}_+$ に値をとる確率変数

$$\begin{cases} p_j = P(X=j) & j=0,1,2,\cdots \\ p_j \geqq 0, & \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} p_j = 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, p_k$$

注 $E(X) = +\infty$ もありうる.

例 $c = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$

$$\begin{cases} P(X=0) = 0 \\ P(X=k) = \dfrac{1}{c}\dfrac{1}{k^2} \quad (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\lambda} = \begin{cases} < +\infty & (\lambda > 1) \\ = +\infty & (0 < \lambda \leqq 1) \end{cases}$$

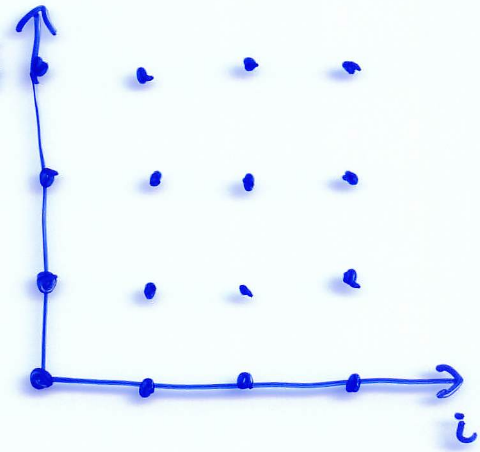
(微積)

$\mathbb{Z}_+$ に値をとる確率変数 X, Y.

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j)$$

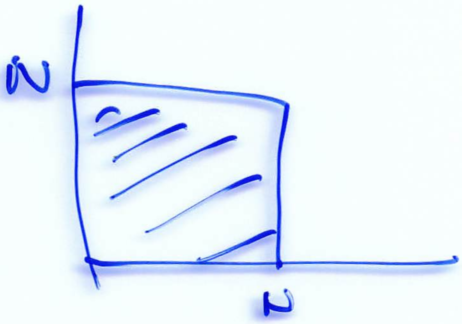
同時確率

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$



定理. $a_{ij} \in \mathbb{R}$

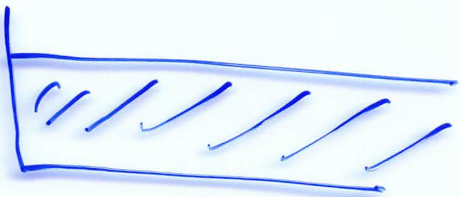
(1) $$\lim_{N\to+\infty} \sum_{0 \leq i,j \leq N} |a_{ij}| < +\infty$$



OR

(2) 各 j $$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}| < +\infty$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}| < +\infty$$



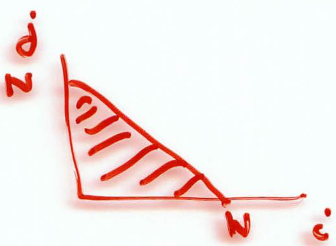
$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \sum_{1 \leq i,j \leq N} a_{ij} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \boxed{\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}}$$

有限になる(各 j (各 i) について)

この状況で、

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_{ij} \right)$$



$$P(X=i, Y=j) = p_{ij} \geqq 0$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 < +\infty$$

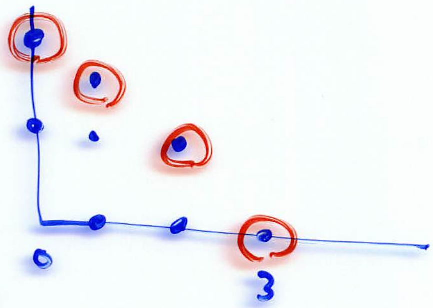
$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{0 \leqq i,j \leqq N}, \quad \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \quad \right), \quad \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \quad \right)$$

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} \leqq \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} \leqq \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$Z = X + Y$ 確率変数

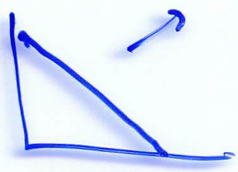
$$P(Z=3) = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03}$$



$$P(Z=k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geqq 0}} p_{ij}$$

$(k,0), (k-1,1), \cdots, (0,k)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geqq 0}} p_{ij}$$



$$= \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

定理

$0 \leq E(X) < +\infty$, $E(Y) < +\infty$ とする。

$$\| \quad \sum_{i=1}^{+\infty} i\, P(X=i) \qquad Z = X+Y$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\, P(X=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} \quad < +\infty$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i,j} p_{ij} \cdot i \quad < +\infty$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} j \cdot P(Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} j\, p_{ij} \quad < +\infty$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i,j} p_{ij} \cdot j \quad < +\infty$$

$$E(X) + E(Y)$$

$$= \boxed{\sum_{i,j} p_{ij} \cdot (i+j)} \quad < +\infty.$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} p_{ij} \underbrace{\boxed{(i+j)}}_{\| \; k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(Z=k) = E(Z)$$

- X, Y : $\mathbb{Z}_+$ 値の確率変数

→ $Z = X + Y$ も ———

$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$: $\mathbb{Z}_+$ 値の確率変数

$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ も

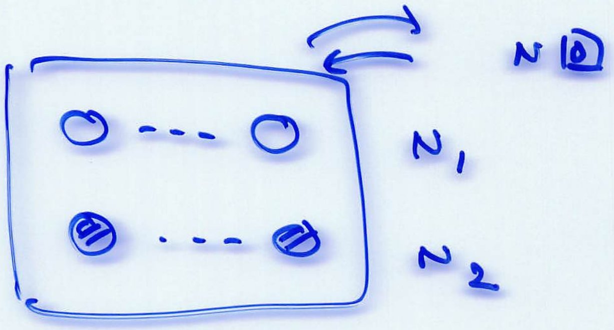
$\mathbb{Z}_+$ 値の確率変数.

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$X_j = 0, 1$ に値をとる.

$P(X_j) = 0 \quad (j = 2, 3, \cdots)$

$$\begin{cases} P(X_j = 0) = q \\ P(X_j = 1) = p. \end{cases} \qquad X_j = \begin{cases} 1 & \text{黒} \\ 0 & \text{白} \end{cases}$$



$$p = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

$$p + q = 1$$

$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$

黒が出た回数.

$E(Z) = E(X_1) + \cdots + E(X_N) = Np$

$E(X_j) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

独立性. $P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$

$\Updownarrow$

X と Y 独立

$$\left.\begin{array}{l} X: \lambda \text{ の Poisson 変数} \\ Y: \lambda' \text{ の ——} \end{array}\right\} X \text{ と } Y \text{ 独立}$$

$Z = X + Y$ は何?

$$P(Z=k)=\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} P(X=i, Y=j)$$

$$=\sum_{Q} P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

$$=\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \frac{1}{k!}\cdot k!\,\lambda^{i}\frac{e^{-\lambda}}{i!}\cdot \lambda'^{j}\frac{e^{-\lambda'}}{j!}$$

$$\frac{k!}{i!\,j!}={}_{k}C_{i} \quad (i+j=k)$$