5/13
確率1

$$\boxed{E(f(X)) := \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, P(X=k)}$$

$:=$ 左を右で定義する.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p^k q$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p^k q + \sum_{k=0}^{+\infty} k p^k q$$

$\cancel{(p+q)^k =}$ $\quad p^k$
$\downarrow$

$$\cancel{\oplus} \quad 1 + p + \cdots + p^N = \frac{1-p^{N+1}}{1-p}$$

$$0 + 1\cdot 1 + 2\cdot p + 3\cdot p^2 + \cdots + k p^{k-1} + \cdots + N p^N$$

$$= \frac{-(N+1)p^N \cdot (1-p) + (1-p^{N+1})}{(1-p)^2}$$

$$0 + 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot p + \cdots + k(k-1)p^{k-2} + \cdots + N(N-1)p^{N-2}$$

$= (\text{右辺})'$ $\rightsquigarrow$ 上 これで計算.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad (|p|<1)$$

$$\frac{2}{(1-p)^3} = \frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k p^{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dp}\left(k p^{k-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p^{k-2}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p^k q = p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) p^{k-2}$$

$$= p^2 q \cdot \frac{2}{q^3} = \frac{2p^2}{q^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p^k q = \frac{2p^2}{q^2} + \frac{p}{q}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2p^2}{q^2} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2}$$

$$= \frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} = \frac{p^2 + pq}{q^2} = \frac{p\overbrace{(p+q)}^{1}}{q^2}$$

$$= \frac{p}{q^2}.$$

$|p|<1$

$$1+p+p^2+p^3+\cdots\cdots = \frac{1}{1-p}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p^k.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

定理. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ 巾級数.

$x=x_0$ で $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$: 収束すると仮定

$\Rightarrow$ 1) $|x|<|x_0|$ である $x\in\mathbb{R}$ に対して

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k||x|^k$ が収束.

2) $|x|<|x_0|$ である x において

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_k x^k)$$

$$1+p+p^2+\cdots\cdots = \frac{1}{1-p} \quad (|p|<1)$$

$$\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dp} p^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k p^{k-1}$$

[$0<|p_0|<1$ である p_0 をとって $|p|<|p_0|$ で考える.]

Poisson 変数　$X = 0, 1, 2, \cdots$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}} = 1.$$

$= e^{\lambda}$

$E(X)$ と $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

を Poisson 変数に対して計算する.

ヒント

$$k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

ボックス14に 5:00まで.