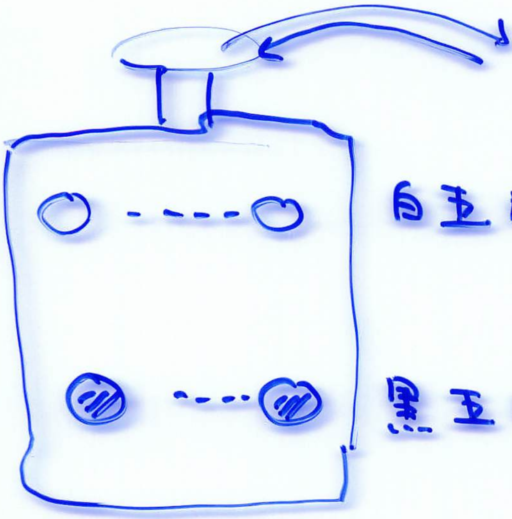
5/6 確率



N回 繰り返す.

白玉 N_1 $\qquad p = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$

黒玉 N_2 $\qquad q = 1-p = \dfrac{N_2}{N_1+N_2}$

X 白玉が出た個数.

$$P(X=k) = {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$$

確率空間.

$N=2$ 積集合.

$$\{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$= \{ \underset{BB}{(0,0)}, \underset{BW}{(0,1)}, \underset{WB}{(1,0)}, \underset{WW}{(1,1)} \}$$

$$P(\{(0,0)\}) = q^2$$

$$P(\{(0,1)\}) = pq$$

$$P(\{(1,0)\}) = pq$$

$$P(\{(1,1)\}) = p^2.$$

一般の場合。 n個の積

$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \{0,1\}$

オメガ $\ni (0, 0, 0, \cdots, 0)$

B B B $\cdots$ B

$\Omega \ni \omega \qquad P(\{\omega\}) = p^k q^{N-k}$

kはωに出てくる白の個数.

$\Omega \supset A$ に対して $P(A)$ 確率

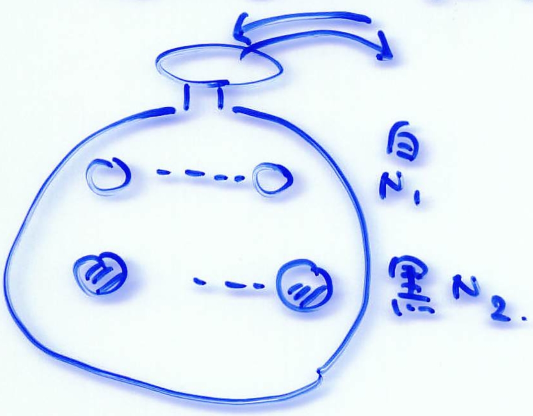
部分集合 　　　　 Aが起こる確率.

事象 (event)

2項変数 $B_N(p)$ 　　 $X = 0, 1, 2, \cdots, N$.

Binomial variable

幾何変数 $Ge(p)$ 　　 $X = 0, 1, 2, \cdots\cdots$



$$p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \quad q = 1 - p$$

黒が出るまで出し入れする.

X 白が出た個数.

$X = 0$ 　 ● 　 $P(X=0) = q$

$X = 1$ 　 ○ ● 　 $P(X=1) = pq$

$X = 2$ 　 ○ ○ ● 　 $P(X=2) = p^2 q$

一般に

$$P(X=k) = p^k q.$$

$$\underbrace{\bigcirc \cdots\cdots \bigcirc}_{k} \ \circledcirc$$

$$0 < p < 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1 \quad \text{かどうか?}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} p^k q = q \cdot \boxed{\frac{1}{1-p}} = q \cdot \frac{1}{q} = 1.$$

N.B. $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k p^k q = p q \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1}$$

$|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1} = ? = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$x \neq 1$

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N$$

$|x| < 1$ $\left\{ \begin{array}{l} x^N \to 0 \\ N x^N \to 0 \\ (N \to +\infty) \end{array} \right.$

両辺をxで微分

$$\sum_{k=0}^{N} k x^{k-1} = \frac{(1-x^{N+1})'(1-x) - (1-x)'(1-x^{N+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1-x^{N+1}) - \overset{N+1}{N} x^N (1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x}{(1-x)^2} \overset{\to 0}{x^N} - \frac{1}{1-x} \overset{\to 0}{N x^N}$$

$(N+1)$

$$\to \frac{1}{(1-x)^2}$$

$|x| < 1$ のとき

$$x^N \to 0 \quad (N \to +\infty)$$

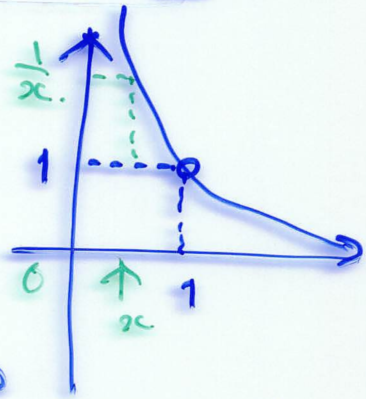
$x = 0$ のとき 明らか。

$0 < x < 1$ のとき.

$$\frac{1}{x} > 1$$

$$= 1 + \theta$$

とおくと $\theta > 0$



$$\left(\frac{1}{x}\right)^N = (1+\theta)^N$$

${}_N C_k \theta^k$

$$= 1 + N\theta + \frac{N(N-1)}{2}\theta^2 + \cdots + \theta^N$$

$$\frac{1}{x^N} = (1+\theta)^N > N\theta$$

$$\frac{1}{x^N} = (1+\theta)^N > \frac{N(N-1)}{2}\theta^2 \quad \boxed{\text{はさみうち}}$$

$$\rightarrow 0 \quad (N \to +\infty)$$

$$0 < x^N < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{N} \rightarrow 0$$

$$0 < x^N < \frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{N(N-1)}$$

$$0 < N x^N < \frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{N-1} \rightarrow 0$$

$$N x^N \rightarrow 0.$$

$0<|x|<1$ のとき $\quad r = |x| \quad 0 < r < 1$

$$0 \leftarrow -r^N < x^N < r^N \rightarrow 0$$

$$0 \leftarrow -N r^N < N x^N < N r^N \rightarrow 0$$

$$x^N \to 0, \quad N x^N \to 0$$

$R > 1 \quad 0 < \frac{1}{R} < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{N^k}{R^N} \longrightarrow 0 \quad (N \to +\infty)$$

$$P(X=k)=p^k q.$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k p^k q = pq\sum_{k=0}^{+\infty} k p^{k-1}$$

期待値.

$$= pq\cdot\frac{1}{(1-p)^2} = pq\cdot\frac{1}{q^2} = \frac{p}{q}.$$

分散

$$V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k-E(X)\right)^2 P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k^2-2E(X)k+E(X)^2\right)P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2P(X=k)-2E(X)\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}k\,P(X=k)}}_{=E(X)}$$

$$+\left(E(X)\right)^2\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)}}_{=1}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2P(X=k)-\left(E(X)\right)^2$$

$$=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2.$$

公式 $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2.$

$x \neq 1$ とする.

$$T_N = \sum_{k=1}^{N} k x^{k-1}$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & T_N = & 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + N x^{N-1} \\
-) & xT_N = & \phantom{1 + {}} x + 2x^2 + \cdots + (N-1)x^{N-1} + N x^N \\
\hline
\end{array}
$$

$(1-x)T_N =$

$|x|<1$ のとき

この式から $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = ?$ を示せ.