デリバティブ.

Derivative 1) 導関数 $f'(x)$

2) 派生語

The word derivative is a derivative of derive.

3) 金融派生商品.

ヨーロピアン・コール・オプション.

$t=0$ 現時点　　$t=N$ 満期時. → 原資産価格 S_N

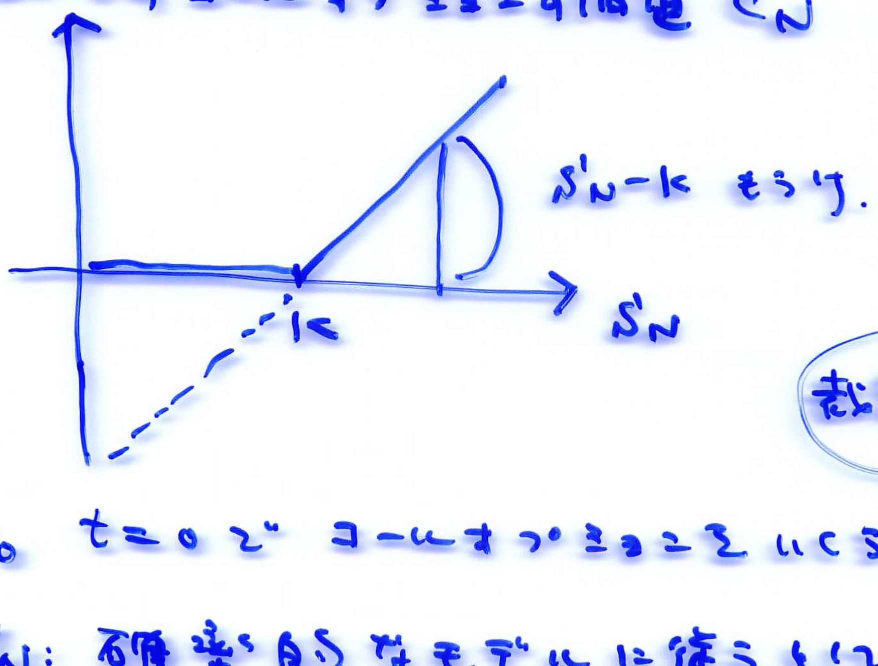
原資産

株, 外貨 etc.

$t=N$で

行使価格 K で原資産を買う権利.

$t=N$でのコールオプションの価値 C_N



裁定価格原理

C_0　$t=0$でコールオプションをいくらで買うか.

S_N: 確率的なモデルに従うとして C_0 を考える

確率変数.　2項モデル.

$S_0 \quad S_1 \quad S_2$

$t=0$ ———————————— $t=N$

$p+q=1$

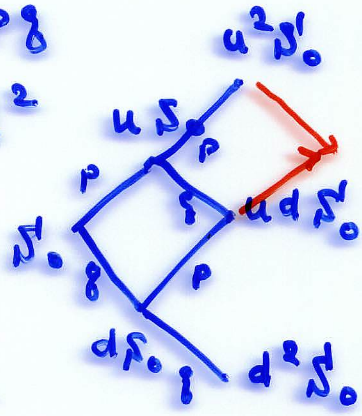
$p, q>0$

$q=1-p$

$$S_1 = \begin{cases} u S_0 & \text{確率 } p \\ d S_0 & \text{確率 } q. \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} u S_1 & \text{確率 } p \\ d S_1 & \text{〃 } q \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u^2 S_0 & \text{確率 } p^2 \\ ud S_0 & 2pq \\ d^2 S_0 & q^2 \end{cases}$$



⋮

$$S_3 = \begin{cases} u S_2 & \text{確率 } p. \\ d S_2 & q \end{cases}$$

⋮

$$= \begin{cases} u^3 S_0 & p^3 \\ u^2 d S_0 & 3p^2 q \\ u d^2 S_0 & 3p q^2 \\ d^3 S_0 & q^3 \end{cases}$$

S_0 —— S_N

probability.

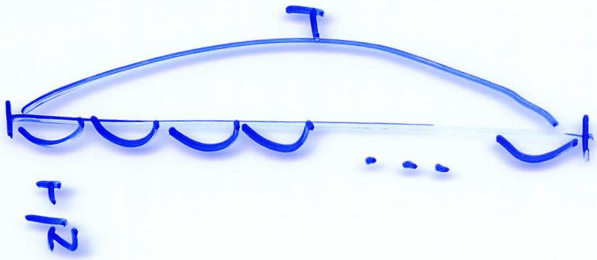
$$P(S_N = u^k d^{N-k} S_0)$$

$$S_{\ell+1} = \begin{cases} u S_\ell & 確率\ p \\ d S_\ell & 確率\ q \end{cases}$$

$$= {}_N C_k \, p^k q^{N-k}.$$

N ステップから 上がるのを k ステップ 選ぶ
場合の数
$= {}_N C_k$

S_N: 確率変数.



$N \to +\infty$

ブラック・ショールズ.

連続的な確率変数

- 正規変数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

確率密度関数.

$$X \sim N(m, \sigma)$$

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

---

①　S_N 2項モデル.

②　($\log S_N$：正規変数)

現実 ⟷ 対数正規モデル

① u, d, p

② m, σ

パラメータ推定.

裁定価格原理

↓

C_0 オプションの価格.

2項変数.

$$(p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$$

2項定理.

$$\underbrace{(p+q)(p+q)\cdots(p+q)}^{N\text{因子}}$$

$p^k q^{N-k}$ ができる場合の数

$= {}_N C_k$

パスカルの3角形

1

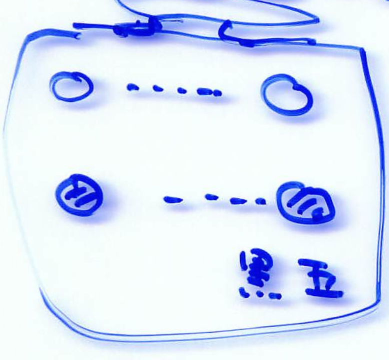
1 1

1 2 1 $(p+q)^2$

1 3 3 1 $(p+q)^3$

1 4 6 4 1 $(p+q)^4$

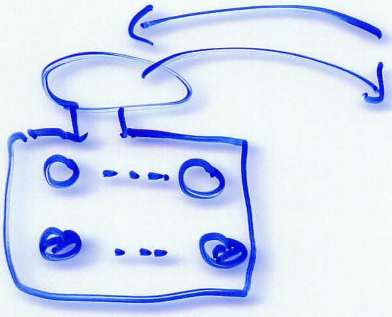
白玉 N_1



N_2

$p = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$ 白玉が出る確率

$q = \dfrac{N_2}{N_1+N_2}$ 黒玉が出る確率.



1個玉を取り出しては戻す.

N回くり返す.

X: 白玉が出る個数.

$X = 0, 1, 2, \cdots, N$ 取り得る値.

$$P(X=k) = {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$$

$$\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} {}_N C_k \, p^k q^{N-k}$$

$$\underset{\text{2項定理}}{=} (p+q)^N = 1^N = 1$$

期待値.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} k \, P(X=k)$$

例1 $N=2$ $100X$円もらえる.

$p = \frac{1}{3}$

$q = \frac{2}{3}$

$X=0$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$X=1$ $2\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$

$X=2$ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$100 \times 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 2 \times 100 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \bigcirc$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k\, {}_N C_k\, p^k q^{N-k}$$

$p+q=1$

$$= pN(p+q)^{N-1} = pN$$

$$(p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} {}_N C_k\, p^k q^{N-k}.$$

$\frac{\partial}{\partial p}$

$$N(p+q)^{N-1}\cdot 1 = \sum_{k=0}^{N} {}_N C_k\, k\, p^{k-1} q^{N-k}$$

$p\times$

$$pN(p+q)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} k\, {}_N C_k\, p^k q^{N-k}$$

---

① 何故この科目をとったか.

② 今日の感想..