

積分について

Le 13 janvier, 2006

戸瀬 信之

積分についてLe 13 janvier, 2006 – p.1/8

上限

- $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界とはある $M \in \mathbb{R}$ に対して

$$a \leq M \quad (a \in A)$$

が成立するときである。この性質を満たす M を A の上界という。

- $\tilde{A} := \{M \in \mathbb{R}; M \text{ は } A \text{ の上界}\}$
- 定理 $\tilde{A}$ には最小値が存在する。これを A の上限と呼ぶ。
- α が A の上限である $\Leftrightarrow$
 - (i) $a \leq \alpha \quad (a \in A)$
 - (ii) $b < \alpha \Rightarrow \exists a \in A \quad b < a \leq \alpha$

積分についてLe 13 janvier, 2006 – p.2/8

実数の完備性

- 数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界とする。すなわち
(i) ある M が存在して
$$a_n \leq M \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(ii) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ とする。このとき $\{a_n\}$ は収束する。

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.3/8

上極限

- 数列 $\{a_n\}$ が上に有界とする。
 $b_n := \sup_{k \geq n} a_k$ とおくと
 $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$
- $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$
- 数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないとき

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

- 数列 $\{a_n\}$ が下に有界とする。 $c_n = \inf_{k \geq n} a_k$ は単調増加数列。

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.4/8

単関数

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の関数 $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が単関数とは
 $s(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ と有限個の値しかとらないとき。
- $\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$ とする。
- $A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ とおくとき
 s が可測 $\Leftrightarrow A_i$ が可測集合 $(i = 1, \dots, n)$

$$\int_{\Omega} s dP = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i)$$

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.5/8

非負値の可測関数の積分

- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が非負、可測とする。 D が可測集合のとき

$$\int_D f dP = \sup_s \int_{\Omega} \chi_D \cdot s dP$$

ここで s は、 $s \leq f$ である非負の可測な単関数とする。

- f, g は非負値、可測関数。 $A, B, D \in \mathcal{F}$
 - (i) $f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$
 - (ii) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$
 - (iii) $c \geq 0$ が定数のとき $\int_D cf = c \int_D f$

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.6/8

単関数近似 No1

- $f, f_1, f_2, \dots$ 非負値、可測関数。
- $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$
- 定理 $\int_D f_n \rightarrow \int_D f$
- f 非負値、可測関数
 $B_k^n := f^{-1} \left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$
 $B_\infty^n := f^{-1}([n, +\infty))$
 $\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_k^n} + n \chi_{B_\infty^n}$
- $\varphi_n \rightarrow f, \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq f$

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.7/8

一般の可測関数

- f 可測関数
- $f_+ = \max(0, f), f_- = -\min(0, f)$ とおくと
 $f_+, f_- \geq 0$ で可測関数。
- $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$

$$\int_{\Omega} |f| dP < +\infty \Leftrightarrow \int_{\Omega} f_+ dP < +\infty, \int_{\Omega} f_- dP < +\infty$$

- このとき f は絶対可積分という

$$\int_D f = \int_D f_+ - \int_D f_-$$

積分について Le 13 janvier, 2006 – p.8/8