

中心極限定理

Le 06 janvier, 2006

戸瀬 信之

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。
- $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。
- $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$
- $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。
- $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$
- $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
- 注意 $E[Z_n] = 0, V[Z_n] = 1$

中心極限定理

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。
- $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$
- $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
- 注意 $E[Z_n] = 0, V[Z_n] = 1$
- 定理 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(Z_n \leq x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (n \rightarrow +\infty)$$

分布収束

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数、

分布収束

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数、 $Z_n \longrightarrow Z$ (分布収束)
とは

$$F_Z(x) := P(Z \leq x) \quad Z \text{ の分布関数}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}; F_Z(x) \text{ は } x \text{ で連続} \}$$

と定めるとき

分布収束

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数、 $Z_n \longrightarrow Z$ (分布収束)
とは

$$F_Z(x) := P(Z \leq x) \quad Z \text{ の分布関数}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}; F_Z(x) \text{ は } x \text{ で連続} \}$$

と定めるとき 任意の $x \in C$ に対して

$$P(Z_n \leq x) \longrightarrow P(Z \leq x)$$

分布収束

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数、 $Z_n \longrightarrow Z$ (分布収束) とは

$$F_Z(x) := P(Z \leq x) \quad Z \text{ の分布関数}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}; F_Z(x) \text{ は } x \text{ で連続} \}$$

と定めるとき 任意の $x \in C$ に対して

$$P(Z_n \leq x) \longrightarrow P(Z \leq x)$$

定理 B $Z_n \rightarrow Z$ (確率収束) とする。すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

とする。このとき $Z_n \rightarrow Z$ (分布収束)

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$
- $\epsilon > 0, F$: continuous at z

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$
- $\epsilon > 0, F$: continuous at z
$$F_n(z) = P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon)$$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$
- $\epsilon > 0, F$: continuous at z
$$F_n(z) = P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon)$$
$$\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon)$$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$

- $\epsilon > 0, F$: continuous at z

$$\begin{aligned} F_n(z) &= P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(|Z - Z_n| > \epsilon) \end{aligned}$$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$

- $\epsilon > 0, F$: continuous at z

$$\begin{aligned} F_n(z) &= P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(|Z - Z_n| > \epsilon) \end{aligned}$$

- 同様に

$$F(z - \epsilon) = P(Z \leq z - \epsilon, Z_n \leq z) + P(Z \leq z - \epsilon, Z_n > z)$$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$

- $\epsilon > 0, F$: continuous at z

$$\begin{aligned} F_n(z) &= P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(|Z - Z_n| > \epsilon) \end{aligned}$$

- 同様に

$$\begin{aligned} F(z - \epsilon) &= P(Z \leq z - \epsilon, Z_n \leq z) + P(Z \leq z - \epsilon, Z_n > z) \\ &\leq P(Z_n \leq z) + P(Z_n - Z > \epsilon) \end{aligned}$$

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z), F(z) = P(Z \leq z)$

- $\epsilon > 0, F$: continuous at z

$$\begin{aligned} F_n(z) &= P(Z_n \leq z, Z \leq z + \epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z + \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon) \\ &\leq P(Z \leq z + \epsilon) + P(|Z - Z_n| > \epsilon) \end{aligned}$$

- 同様に

$$\begin{aligned} F(z - \epsilon) &= P(Z \leq z - \epsilon, Z_n \leq z) + P(Z \leq z - \epsilon, Z_n > z) \\ &\leq P(Z_n \leq z) + P(Z_n - Z > \epsilon) \\ &\leq P(Z_n \leq z) + P(|Z_n - Z| > \epsilon) \end{aligned}$$

Démonstration du TH B(2)

- $$F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$$

Démonstration du TH B(2)

- $F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$
- Take a limit $n \rightarrow +\infty$

Démonstration du TH B(2)

- $F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$
- Take a limit $n \rightarrow +\infty$

$$F(z - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z + \epsilon)$$

Démonstration du TH B(2)

- $$F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$$

- Take a limit $n \rightarrow +\infty$

$$F(z - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z + \epsilon)$$

- $\epsilon > 0$ is arbitrary. Take a limit $\epsilon \rightarrow +0$

Démonstration du TH B(2)

- $F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$
- Take a limit $n \rightarrow +\infty$

$$F(z - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z + \epsilon)$$

- $\epsilon > 0$ is arbitrary. Take a limit $\epsilon \rightarrow +0$

$$F(z) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z)$$

Démonstration du TH B(2)

- $F(z - \epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z + \epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$
- Take a limit $n \rightarrow +\infty$

$$F(z - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z + \epsilon)$$

- $\epsilon > 0$ is arbitrary. Take a limit $\epsilon \rightarrow +0$

$$F(z) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z) \leq F(z)$$

- Remark that F is continuous at z .

レポート

- レポート（提出：1月13日）

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

レポート

- レポート（提出：1月13日）
- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c(\text{定数}) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、 $Z_n \rightarrow c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数
- 定理 $Z_n \rightarrow Z$ (分布収束) $\Leftrightarrow$

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数
- 定理 $Z_n \rightarrow Z$ (分布収束) $\Leftrightarrow$
任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_{Z_n}(\xi) \rightarrow \varphi_Z(\xi)$

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

- $Z, Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数
- 定理 $Z_n \rightarrow Z$ (分布収束) $\Leftrightarrow$
任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_{Z_n}(\xi) \rightarrow \varphi_Z(\xi)$
- 証明 これは、2年生のレベルではない。よって省略。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。
- $\psi(\xi) = \varphi_{X_n}(\xi)$ とすると

$$\phi(\xi) := \varphi_{U_n} = \psi \left(\frac{\xi}{n} \right)^n$$

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。
- $\psi(\xi) = \varphi_{X_n}(\xi)$ とすると

$$\phi(\xi) := \varphi_{U_n} = \psi \left(\frac{\xi}{n} \right)^n$$

- $E[X]$ が有限から $\psi(\xi) = 1 + it\mu + o(t)$ が分る。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。
- $\psi(\xi) = \varphi_{X_n}(\xi)$ とすると

$$\phi(\xi) := \varphi_{U_n} = \psi\left(\frac{\xi}{n}\right)^n$$

- $E[X]$ が有限から $\psi(\xi) = 1 + it\mu + o(t)$ が分る。
- $\phi(\xi) = \left(1 + \frac{i\xi\mu}{n} + o\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n$

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数で、同一分布に従う。
- 仮定 $E[X] = \mu$ が有限とする。
- 定理 $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。
- $\psi(\xi) = \varphi_{X_n}(\xi)$ とすると

$$\phi(\xi) := \varphi_{U_n} = \psi\left(\frac{\xi}{n}\right)^n$$

- $E[X]$ が有限から $\psi(\xi) = 1 + i t \mu + o(t)$ が分る。
- $\phi(\xi) = \left(1 + \frac{i \xi \mu}{n} + o\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{i \mu \xi}$