中心極限定理
Le 06 janvier, 2006

戸瀬　信之

中心極限定理

- $X_1, X_2, \cdots$ 独立な確率変数、同一の分布に従う
- $E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$ を有限とする。
- $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
- **注意** $E[Z_n] = 0$, $V[Z_n] = 1$
- **定理** 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(Z_n \leq x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (n \to +\infty)$$

分布収束

- $Z, Z_1, Z_2, \cdots$ 確率変数、 $Z_n \longrightarrow Z$（分布収束）とは

$$F_Z(x) := P(Z \leq x) \quad Z \text{ の分布関数}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}; F_Z(x) \text{ は } x \text{ で連続}\}$$

と定めるとき 任意の $x \in C$ に対して

$$P(Z_n \leq x) \longrightarrow P(Z \leq x)$$

定理 B $Z_n \to Z$（確率収束）とする。すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

とする。このとき $Z_n \to Z$（分布収束）

Démonstration du TH B

- $F_n(z) = P(Z_n \leq z)$, $F(z) = P(Z \leq z)$
- $\epsilon > 0$, F: continuous at z
  $F_n(z) = P(Z_n \leq z, Z \leq z+\epsilon) + P(Z_n \leq z, Z > z+\epsilon)$
  $\leq P(Z \leq z+\epsilon) + P(Z - Z_n > \epsilon)$
  $\leq P(Z \leq z+\epsilon) + P(|Z - Z_n| > \epsilon)$
- 同様に
  $F(z-\epsilon) = P(Z \leq z-\epsilon, Z_n \leq z) + P(Z \leq z-\epsilon, Z_n > z)$

  $\leq P(Z_n \leq z) + P(Z_n - Z > \epsilon)$
  $\leq P(Z_n \leq z) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$

Démonstration du TH B(2)

- $F(z-\epsilon) - P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq F_n(z) \leq F(z+\epsilon) + P(|Z_n - Z| > \epsilon)$
- Take a limit $n \to +\infty$

$$F(z-\epsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} F_n(z) \leq F(z+\epsilon)$$

- $\epsilon > 0$ is arbitrary. Take a limit $\epsilon \to +0$

$$F(z) \leq \lim_{n\to+\infty} F_n(z) \leq F(z)$$

- Remark that F is continuous at z.

レポート

- レポート（提出：１月１３日）
- $Z_1, Z_2, \cdots$ 確率変数が

$$Z_n \longrightarrow c\,(\text{定数})\quad (n \to +\infty)$$

と分布収束するとする。このとき、$Z_n \to c$ と確率収束することを示せ。

- Hint:

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z) \longrightarrow \begin{cases} 0 & (z < c) \\ 1 & (z > c) \end{cases}$$

をまず示せ。

特性関数と極限

- 確率変数 Z の特性関数

$$\varphi_Z(\xi) := E[e^{iZ\xi}]$$

- $Z, Z_1, Z_2, \cdots$ 確率変数
- **定理** $Z_n \to Z$（分布収束）$\Leftrightarrow$
任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_{Z_n}(\xi) \to \varphi_Z(\xi)$
- **証明** これは、２年生のレベルではない。よって省略。

応用（大数の弱法則）

- $X_1, X_2, \cdots$ 確率変数で、同一分布に従う。
- **仮定** $E[X] = \mu$ が有限とする。
- **定理** $U_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to \mu$ （確率収束）
- 分布収束を示せば、「レポート」から確率収束がでる。
そのためには特性関数の収束を考える。
- $\psi(\xi) = \varphi_{X_n}(\xi)$ とすると

$$\phi(\xi) := \varphi_{U_n} = \psi\left(\frac{\xi}{n}\right)^n$$

- $E[X]$ が有限から $\psi(\xi) = 1 + it\mu + o(t)$ が分る。
- $\phi(\xi) = \left(1 + \frac{i\xi\mu}{n} + o(\frac{\xi}{n})\right)^n \longrightarrow e^{i\mu\xi}$