1月6日提出の レポート問題は 1月13日に提出しても構いません.

(X, Y) が 2次元の正規分布に従うとする.

$E[X] = m_1$, $E[Y] = m_2$, $V[X] = \sigma_1^2$, $V[Y] = \sigma_2^2$

$\rho(X, Y) = \rho$

とする. $(a, b) \neq \vec{0}$ のとき

$$Z = aX + bY$$

の密度関数を計算する.

ヒント

① $f(x,y)$ を2変数の確率変数 (X,Y) の同時密度とします。$(a,b) \neq \vec{0}$ とします。

$$U = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(aX + bY)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-bX + aY)$$

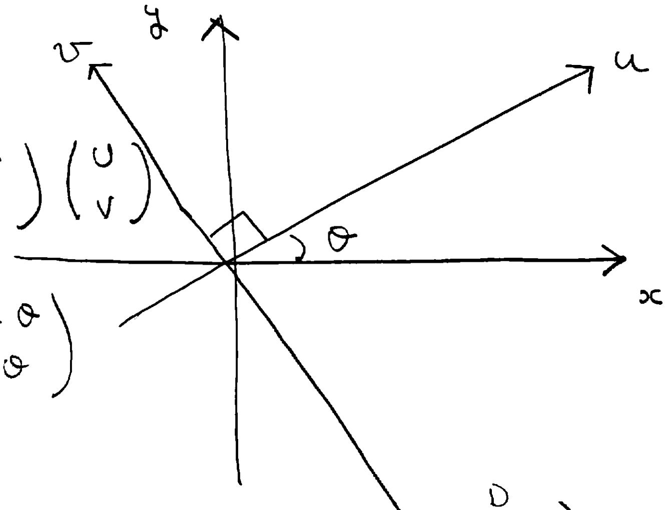
とすると

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と回転行列で記述します。ここで

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

とします。

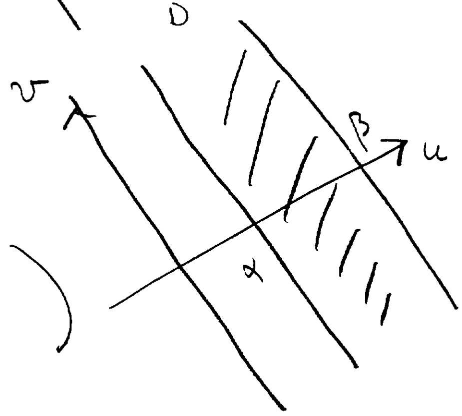


$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

$$= U \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P(\alpha \leq U \leq \beta)$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy$$



$$\left(D = \left\{ (x,y) \,;\, \alpha \leq \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \beta \right\} \right)$$

を U, V の積分にして表します

回転の座標変換での積分は

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D'} \underbrace{f(u\cos\theta - v\sin\theta,\ u\sin\theta + v\cos\theta)}_{=g(u,v)}\,du\,dv$$

$$\left(D' = \{(u, v)\ ;\ \alpha \leq u \leq \beta\} \right)$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)\,dv \right) du$$

となります。これから U の密度関数を計算できます。
U の密度関数から

$$Z = aX + bY$$

の密度関数を求めるのは簡単ですよね!!

② Z が正規分布に従うと決めつけるのは許容範囲外です。(再提出しましょう)

③ $E\left[e^{i(aX+bY)\xi}\right]$ を計算して特性関数の一意性を使う方法もあります。(これは期末レポートのⅢの続きからも導けます)