<u>積分入門</u>　$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$ であるが

このような積分のイメージは好ましくない（イメージがない）.

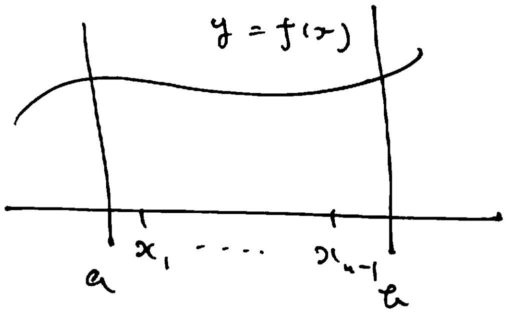
右のn等分した区間 $[0,1]$ の上にのびる短冊の面積の和は

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$(n \to +\infty)$

が成立する.



$[a, b]$ の分割とは

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

の分点 $\{x_j\}$ のことで、その幅は

$$\Delta = \max_j (x_j - x_{j-1})$$

である.

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, f(x_j) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

（但し $\Delta \to 0$ ）

が積分の定義である.

積分入門（その2）

微分積分学の基本定理

$f(t)$：連続関数に対して

$$F(t) := \int_a^t f(s)\,ds$$

と定めよう．このとき次が成立する．

定理　$F'(t) = f(t)$

この定理を微分積分学の基本定理と呼ぶのは、本来複雑な極限である積分が原始関数（不定積分）を知ることにより単純に計算できるからである．

$$G'(t) = f(t)$$

が成立するとしよう．この G を f の原始関数と呼ぶ．

$$(F(t) - G(t))' = f(t) - f(t) \equiv 0$$

より

$$F(t) - G(t) = C \quad (\text{定数})$$

である*．

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

から　$F(a) - G(a) = C$ を用いて $C = -G(a)$

---

*) $g'(t) \equiv 0 \Longrightarrow g(t) = C$ （定数）
証明は平均の定理を用いる．

$$F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

従って

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

が得られた。これがあるので

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

と計算できるのである。

置換積分　　$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

とする。このとき

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= f(x)\cdot x'(t)$$

が得られる。このことを用いると

$$\int_a^b f(x(t))\,x'(t)\,dt = \Big[F(x(t))\Big]_{t=a}^{t=b}$$

$$= F(x(b)) - F(x(a))$$

が得られる。

例　$\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$　　$f = \dfrac{1}{x}$,　$x(t) = 1+t^2$

と考えると

$$\int_0^1 \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \Big[\log x(t)\Big]_0^1$$

$$= \log 2 - \log 1 = \log 2$$

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x(t))\, x'(t)\, dt = \Big[\, F(x(t)) \,\Big]_{t=a}^{t=b}$$

$$= F(x(b)) - F(x(a))$$

を示した。　$A = x(a)$, $B = x(b)$ とすると

$$\int_B^A f(x)\, dx = \big(F(B) - F(A)\big)$$

$$= F(x(b)) - F(x(a))$$

より <u>公式</u>

$$\int_B^A f(x)\, dx = \int_b^a f(x(t))\, x'(t)\, dt$$

が成立することが分る。これを置換積分と呼ぶ。

部分積分

$$(fg)' = f'g + fg'$$

に注意しよう。これから

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

を得る。例りをいくつかみよう。

1)
$$\int \log t\,dt = \int (t)' \log t\,dt$$
$$= t\log t - \int t(\log t)'\,dt$$
$$= t\log t - \int t\,\frac{1}{t}\,dt$$
$$= t\log t - t + C$$

2)
$$\int te^t\,dt = \int t\,(e^t)' = te^t - \int (t)'e^t\,dt$$
$$= te^t - \int e^t\,dt$$
$$= te^t - e^t + C$$

定積分では

$$\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx$$

が成立する。