第 1 章　確率空間と確率変数

1.1　確率空間とは

1.1.1　確率空間の定義

可測空間

集合 Ω が与えられているとする。このとき $\mathcal{P}_\Omega$ を Ω の部分集合の全体の集合とする。$\mathcal{P}_\Omega$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が σ 代数であるとは条件

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{1.1}$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \{\omega \in X;\ \omega \notin A\} \in \mathcal{F} \tag{1.2}$$

$$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F} \tag{1.3}$$

が成立するときです。σ 代数をもつ集合 $(\Omega, \mathcal{F})$ のことを**可測空間** *(measurable space)* と呼びます。

ここで σ 代数の公理 (1.1),(1.2),(1.3) から導かれることをまとめましょう。

(i)　$\emptyset \in \mathcal{F}$
$\emptyset = \Omega^c$ から従います。

(ii)　$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$
$A_k = \emptyset\ (k = n+1, n+2, \cdots)$ と定めると

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

であることから従います。

(iii)　$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$
これは

$$A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c \in \mathcal{F}$$

を用いて

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = (A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c)^c \in \mathcal{F}$$

と示すことができます。

(iv) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$
これは

$$A_1^c, A_2^c, \cdots \in \mathcal{F}$$

から得られる

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{F}$$

から従います。

(v) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
これは

$$A \setminus B = A \cup B^c$$

を用いて示すことができます。

ここで記号をいくつか用意します。$A, B \in \mathcal{P}_\Omega$ とします。もし

$$A \cap B = \emptyset$$

ならば

$$A + B := A \cup B$$

と記します。さらに $A_n \in \mathcal{P}_\Omega$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成立するとします。このとき

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

と記します。

確率空間

集合 Ω が確率空間であるとは、可測空間であること、すなわち $\mathcal{P}_\Omega$ の部分集合である σ 代数 $\mathcal{F}$ が与えられていて、写像

$$P: \ \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が条件

$$P(A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{F}) \tag{1.4}$$

$$P(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \tag{1.5}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.6}$$

を満すときです。

まず条件 (1.4),(1.5),(1.6) から導かれることをいくつか紹介しましょう。

(i) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
これは (1.5) の特別な場合と理解しましょう。

(ii) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
これは **(i)** の特別な場合です。

(iii) $P(\emptyset) = 0$
上の **(ii)** を $\Omega + \emptyset = \Omega$ に用いて

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

から従います。

(iv) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

から

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

を得ます。

(v) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$
これは

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots$$

$$A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots + (A_n \setminus A_{n-1})$$

から従う

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) &= P(A_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)) \\
&= P(A_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\
&= P(A_1) + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} P(A_N)
\end{aligned}$$

から分ります。

演習 1.1. $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ が $\mathcal{F}$ の単調減少族とします。すなわち

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

が成立するとします。このとき

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty})A_n$$

が成立することを示してください。

σ 代数（続論）

集合 Ω とその部分集合の全体がなす集合 $\mathcal{P}_\Omega$ を考えます。さらに

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$$

である $\mathcal{A}$ を取ります。このとき σ 代数 $\mathcal{F}$ で

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{A}, \quad \mathcal{G} \text{ は } \sigma \text{ 代数} \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$$

を満すものが唯一つ存在します。言い換えると $\mathcal{A}$ を含む σ 代数で最小のものが唯一つ存在します。これを

$$\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{A}]$$

と記し、$\mathcal{A}$ が生成する σ 代数と呼びます。

実際、

$$\sigma[\mathcal{A}] = \bigcap_{\mathcal{G} \supset \mathcal{A},\ \mathcal{G}:\sigma \text{ 代数}} \mathcal{G}$$

と定義すればよいことが分ります。

演習 1.2. $\mathcal{A}_\lambda$ が σ 代数であるとします $(\lambda \in \Lambda)$。このとき

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

は σ 代数となることを示してください。

演習 1.3. 条件

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$$

から

$$\sigma[\mathcal{A}_1] \subset \sigma[\mathcal{A}_2]$$

を導いてください。

演習 1.4. $\mathcal{G}$ が σ 代数であるならば

$$\sigma[\mathcal{G}] = \mathcal{G}$$

が成立することを示してください。

例 1.1. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合全体とします。このとき

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma[\mathcal{O}]$$

を $\mathbb{R}^n$ の Borel 集合族と呼びます。
　特に $n = 1$ の場合は

$$\mathcal{A}_1 = \{I;\ I\text{ は開区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{I;\ I\text{ は有界開区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{I;\ I\text{ は閉区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{I;\ I\text{ は有界閉区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_5 = \{I;\ I\text{ は区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{(a, b];\ -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$$

の何れも $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ を生成します。$\mathcal{A}_6$ においては、$(a, +\infty]$ を $(a, +\infty)$ と見倣してください。

演習 1.5.

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \subset \sigma[\mathcal{A}_1]$$

を示して

$$\sigma[\mathcal{A}_1] = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

を示してください。

例 1.2. $\Omega_1,\ \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ を集合とします。また $\mathcal{F}_j$ を Ω_j の σ 代数とします。このとき

$$\mathcal{A} = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n;\ B_j \in \mathcal{F}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)\}$$

が生成する σ 代数を

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$$

と記して積 σ 代数と呼びます。特に

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$$

が成立することに注意しましょう。

演習 1.6.

$$\mathcal{A}_1 = \{I_1 \times I_2; I_1, I_2\text{は開区間 }\}$$

を $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ 中で定めます。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \subset \sigma[\mathcal{A}_1]$$

を示して

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$$

を導いてください。

確率変数・可測写像

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。

$$X:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

が**確率変数**であるとは、任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

が成立するときです。この条件は、以下に一般的に示すように、

$$X^{-1}(I) \in \mathcal{F} \quad (I \in \mathcal{A}_j)$$

が成立することと必要十分です（$j = 1, 2, \cdots, 6$)。

より一般には、可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ があるとき

$$f:\ \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

が**可測**であるとは、任意の $B \in \mathcal{F}_2$ に対して

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1;\ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_2$$

が成立するときです。もし $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_2$ が条件

$$\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}_2$$

を満しているとします。すなわち $\mathcal{A}$ が $\mathcal{F}_2$ を生成しているとします。このとき f が可測であるのは

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \quad (B \in \mathcal{A})$$

が成立することと必要十分です。

写像

$$f:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

が定義域と値域の Borel 集合族に関して可測であるとき *Borel* **写像**と呼びます。f が連続であるとき、$O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して

$$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$$

が成立しますから、f は可測となります。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と

$$(S_1, \mathcal{G}_1),\ \cdots, (S_n, \mathcal{G}_n)$$

があるとします。そして写像

$$f_i:\ \Omega_i \longrightarrow S_i$$

が可測であるとします。このとき

$$f = (f_1, \cdots, f_n):\ \Omega \longrightarrow S_1 \times \cdots \times S_n$$

は積 σ 代数 $\mathcal{G}_1\times\cdots\mathcal{G}_n$ に関して可測です。それは

$$\{B_1\times\cdots\times B_n;\ B_j\in\mathcal{G}_j\ (j=1,\cdots,n)\}$$

が積 σ 代数 $\mathcal{G}_1\times\cdots\mathcal{G}_n$ を生成して

$$f^{-1}(B_1\times\cdots\times B_n)=f_1^{-1}(B_1)\cap\cdots\cap f_n^{-1}(B_n)\in\mathcal{F}$$

となるからです。

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の n 次元ベクトル値の確率変数とは可測写像

$$F:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

のことです。もし $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に $X_1,\ \cdots,\ X_n$ と n 個の確率変数があるとき、これを用いて n 次元ベクトル値の確率変数

$$F:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n\ \omega\mapsto(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

を構成することができます。この F の可測性は上でより一般的に示してあります。

可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ と

$$(S_1,\mathcal{G}_1),\ (S_2,\mathcal{G}_2)$$

があるとします。そして写像

$$f:\ \Omega\longrightarrow S_1,\ g:\ S_1\longrightarrow S_2$$

が可測であるとします。このとき合成写像

$$g\circ f:\ \Omega\longrightarrow S_2$$

は可測となります。それは $B\in\mathcal{G}_2$ に対して

$$(g\circ f)^{-1}(B)=f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\in\mathcal{F}$$

から分ります。

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の n 次元ベクトル値の確率変数

$$F:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

があるとします。これと連続写像

$$\pi_i:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\quad(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

の合成

$$f_i=\pi_i\circ F:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$$

は可測となりますから、確率変数です。これをベクトル値の確率変数 F の**周辺確率変数**と呼びます。