ベクトルの転置 n 次元列ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

の転置 (transposition) は n 次元行ベクトル

$${}^t\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

のことです。また n 次元行ベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

の転置は n 次元列ベクトル

$${}^t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

のことです。転置を 2 度繰り返すと、元に戻ることに注意しましょう。

$${}^t\left({}^t\vec{a}\right) = \vec{a}, \quad {}^t\left({}^t\mathbf{a}\right) = \mathbf{a}$$

実ベクトルの場合は、内積と関連させることが重要です。すなわち $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = {}^t\vec{a}\ \vec{b} \tag{1}$$

が成立します。

行列の転置　$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を考えます。この行列の**転置行列**とは、A の列ベクトル表示 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \vec{a}_n)$ を用いて

$${}^tA := \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

によって定義される $n \times m$ 行列です。A の行ベクトル表示

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

を用いると

$$ {}^tA = \left({}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2 \ \cdots {}^t\mathbf{a}_m\right) $$

と ${}^tA$ は列ベクトル表示されます。${}^tA$ の j 行 i 列の成分は A の i 行 j 列 a_{ij} となることにも注意しましょう。

行列の転置の基本的な性質についていくつか説明します。

(i) A を $m \times n$ 行列とするとき

$$ {}^t\left({}^tA\right) = A \tag{2} $$

と転置を 2 度施すと元に戻ります。

(ii) B を上で考えた $n \times \ell$ 行列とします。このとき積 AB が定義されますが

$$ {}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA \tag{3} $$

が成立します。

実際このことを A の行ベクトル表示および B の列ベクトル表示

$$ A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \vec{b}_\ell) $$

を用いて証明しましょう。まず AB は

$$ AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{b}_1 & \mathbf{a}_1\vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2\vec{b}_1 & \mathbf{a}_2\vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{a}_m\vec{b}_1 & \mathbf{a}_m\vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{b}_\ell \end{pmatrix} $$

から AB の (i,k) 成分は $\mathbf{a}_i\vec{b}_k$ となります。従って ${}^t(AB)$ の (k,i) 成分は $\mathbf{a}_i\vec{b}_k$ となります。

他方 ${}^tB{}^tA$ を考えると

$$ {}^tB{}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_\ell \end{pmatrix} \left({}^t\mathbf{a}_1 \ {}^t\mathbf{a}_2 \ \cdots {}^t\mathbf{a}_m\right) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1{}^t\mathbf{a}_1 & {}^t\vec{b}_1{}^t\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_1{}^t\mathbf{a}_m \\ {}^t\vec{b}_2{}^t\mathbf{a}_1 & {}^t\vec{b}_2{}^t\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_2{}^t\mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^t\vec{b}_\ell{}^t\mathbf{a}_1 & {}^t\vec{b}_\ell{}^t\mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t\vec{b}_\ell{}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix} $$

となりますから、${}^tB{}^tA$ の (k,i) 成分は ${}^t\vec{b}_k{}^t\mathbf{a}_i$ であることが分かります。以上の計算から

$$ \mathbf{a}_i \ \vec{b}_k = {}^t\vec{b}_k \ {}^t\mathbf{a}_i $$

を示せばよいことが分かります。これは、一般に n 次元行ベクトル $\mathbf{a}$ と n 次元列ベクトル $\vec{b}$ に対して

$$ \mathbf{a} \ \vec{b} = {}^t\vec{b} \ {}^t\mathbf{a} $$

が成立することから分かります。

なぜ転置行列が重要になのかについて説明しましょう。実数値の $m \times n$ 行列の A には右から n 次元列ベクトル $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ を掛けることができ、$A\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ となります。他方、$n \times m$ 行列の ${}^tA$ には右から m 次元列ベクトル $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ をかけることができ、${}^tA\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ となります。このとき

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) \tag{4}$$

が成立します。等式の左辺は $\mathbb{R}^m$ の内積、右辺は $\mathbb{R}^n$ の内積です。この (4) は、(1) で与えた内積の表示を用いて

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = {}^t(A\vec{v})\vec{w} = ({}^t\vec{v}{}^tA)\vec{w} = {}^t\vec{v}({}^tA\vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

と証明します。