

部分空間

戸瀬 信之

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

- $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

- $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2)$$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

- $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= \lambda(x_1 - y_1 - 2z_1) + \mu(x_2 - y_2 - 2z_2) = 0 \end{aligned}$$

3次元空間中

- $\mathbb{R}^3$ 中 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V$

$$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

- $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= \lambda(x_1 - y_1 - 2z_1) + \mu(x_2 - y_2 - 2z_2) = 0 \end{aligned}$$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = 0$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = 0$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = 0$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$
- In fact $(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda(\vec{v}_1, \vec{a}) + \mu(\vec{v}_2, \vec{a})$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = 0$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$
- In fact $(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda(\vec{v}_1, \vec{a}) + \mu(\vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$

3次元空間中 No2

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\}$
- 別の見方 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \in V \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = 0$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$
- In fact $(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda(\vec{v}_1, \vec{a}) + \mu(\vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底
- $\forall \vec{v} \in V$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底
- $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底
- $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は 1 次独立

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底
- $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は 1 次独立
 $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

3次元空間中 No3-基底

- $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y - 2z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V の基底

- $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$

- $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は 1 次独立

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $V_2 := \{t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $V_2 := \{t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_2$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $V_2 := \{t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_2$
- In fact $\vec{v}_1 = t\vec{a}, \vec{v}_2 = s\vec{a}$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $V_2 := \{t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_2$
- In fact $\vec{v}_1 = t\vec{a}, \vec{v}_2 = s\vec{a}$
 $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = (t\lambda + s\mu)\vec{a} \in V_2$

3次元空間の場合 No4

- $\mathbb{R}^3$ 中 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $V_2 := \{t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2 \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V_2$
- In fact $\vec{v}_1 = t\vec{a}, \vec{v}_2 = s\vec{a}$
 $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = (t\lambda + s\mu)\vec{a} \in V_2$
- $\vec{a}$ は基底

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

- $\ker(A)$ is a subspace of $\mathbb{R}^4$

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

- $\ker(A)$ is a subspace of $\mathbb{R}^4$ i.e.
 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker A \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

- $\ker(A)$ is a subspace of $\mathbb{R}^4$ i.e.
 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker A \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$
- In fact $A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2)$

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

- $\ker(A)$ is a subspace of $\mathbb{R}^4$ i.e.
 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker A \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$
- In fact $A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2$

斉次方程式で定まる部分空間

- 3×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4; A\vec{v} = \vec{0}\}$ called kernel of A

- $\ker(A)$ is a subspace of $\mathbb{R}^4$ i.e.

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker A \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in \ker(A)$$

- In fact $A(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2$
 $= \lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$

斉次方程式で定まる部分空間

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

斉次方程式で定まる部分空間

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y + 2w = 0, z - w = 0$$

斉次方程式で定まる部分空間

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y + 2w = 0, \quad z - w = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2w \\ y \\ w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

斉次方程式で定まる部分空間

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y + 2w = 0, z - w = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 2w \\ y \\ w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is a basis of $\ker(A)$.

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
a subspace spanned by $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
a subspace spanned by $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4$
- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(A) \Rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in \text{Im}(A)$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
a subspace spanned by $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4$
- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(A) \Rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in \text{Im}(A)$
 $\vec{w}_1 = A\vec{v}_1, \vec{w}_2 = A\vec{v}_2$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
a subspace spanned by $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4$
- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(A) \Rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in \text{Im}(A)$
 $\vec{w}_1 = A\vec{v}_1, \vec{w}_2 = A\vec{v}_2$
 $\rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2$

Aの像

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\text{Im}(A) = \{A\vec{v} \in \mathbb{R}^3; \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$
- $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4)$ とする。
 $A\vec{v} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
- $\text{Im}(A) = \{x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4; x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
a subspace spanned by $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4$
- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(A) \Rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in \text{Im}(A)$
 $\vec{w}_1 = A\vec{v}_1, \vec{w}_2 = A\vec{v}_2$
 $\rightarrow \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2$
 $= A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) \in \text{Im}(A)$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4)$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$
 $P = P_\ell \cdots P_1$ 正則で $\rightarrow PA = B$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$
 $P = P_\ell \cdots P_1$ 正則で $\rightarrow PA = B$
 $P(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) = (P\vec{a}_1 \ P\vec{a}_2 \ P\vec{a}_3 \ P\vec{a}_4) =$
 $(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4)$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$
 $P = P_\ell \cdots P_1$ 正則で $\rightarrow PA = B$
 $P(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) = (P\vec{a}_1 \ P\vec{a}_2 \ P\vec{a}_3 \ P\vec{a}_4) =$
 $(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \rightarrow \vec{b}_i = P\vec{a}_i, \ \vec{a}_i = P^{-1}\vec{b}_i$

Aの像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$
 $P = P_\ell \cdots P_1$ 正則で $\rightarrow PA = B$
 $P(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) = (P\vec{a}_1 \ P\vec{a}_2 \ P\vec{a}_3 \ P\vec{a}_4) =$
 $(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \rightarrow \vec{b}_i = P\vec{a}_i, \ \vec{a}_i = P^{-1}\vec{b}_i$
- $P^{-1}\vec{b}_4 = P^{-1}(2\vec{b}_1 - \vec{b}_3)$

A の像の基底

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \quad \vec{b}_2 = 2\vec{b}_1, \ \vec{b}_4 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_3 \rightarrow$
 $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \ \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- Why can we get the linear relations of $\vec{a}_i$
 $\exists P_1, \cdots P_\ell$ 基本行列 $P_\ell \cdots P_1 A = B$
 $P = P_\ell \cdots P_1$ 正則で $\rightarrow PA = B$
 $P(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) = (P\vec{a}_1 \ P\vec{a}_2 \ P\vec{a}_3 \ P\vec{a}_4) =$
 $(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4) \rightarrow \vec{b}_i = P\vec{a}_i, \ \vec{a}_i = P^{-1}\vec{b}_i$
- $P^{-1}\vec{b}_4 = P^{-1}(2\vec{b}_1 - \vec{b}_3) \rightarrow \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$
 $= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3)$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent.

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent. $c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent. $c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow P(c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3) = P\vec{0} = \vec{0}$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent. $c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow P(c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3) = P\vec{0} = \vec{0} \rightarrow c_1\vec{b}_1 + c_3\vec{b}_3 = \vec{0}$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent. $c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow P(c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3) = P\vec{0} = \vec{0} \rightarrow c_1\vec{b}_1 + c_3\vec{b}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow c_1 = c_3 = 0$

A の像の基底 No2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1, \vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$
- $$\begin{aligned} x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 \\ &= x\vec{a}_1 + 2y\vec{a}_1 + z\vec{a}_3 + w(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) \\ &= (x + 2y + 2w)\vec{a}_1 + (z - w)\vec{a}_3 \end{aligned}$$
- $\text{Im}(A)$ is spanned by $\vec{a}_1, \vec{a}_3$.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ are linear independent. $c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow P(c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3) = P\vec{0} = \vec{0} \rightarrow c_1\vec{b}_1 + c_3\vec{b}_3 = \vec{0}$
 $\rightarrow c_1 = c_3 = 0$
- $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ is a basis of $\text{Im}(A)$.