

行列の転置 + 行列の対角化

戸瀬 信之

行列の転置 No1

- ベクトルの転置

行列の転置 No1

- ベクトルの転置

$${}^t(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

行列の転置 No1

- ベクトルの転置

$${}^t(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

行列の転置 No2

- 行列の転置

行列の転置 No2

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

行列の転置 No2

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

行列の転置 No2

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

- $A: m \text{ 行 } n \text{ 列} \Rightarrow {}^tA: n \text{ 行 } m \text{ 列}$

行列の転置 No2

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

- $A: m \text{ 行 } n \text{ 列} \Rightarrow {}^tA: n \text{ 行 } m \text{ 列}$
- $A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ji})$

行列の転置 No2

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

- $A: m \text{ 行 } n \text{ 列} \Rightarrow {}^tA: n \text{ 行 } m \text{ 列}$
- $A = (a_{ij}), {}^tA = (b_{ji}) \Rightarrow b_{ji} = a_{ij}$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明 ${}^t({}^t \vec{a}) = \vec{a}$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明 ${}^t({}^t \vec{a}) = \vec{a}$

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明 ${}^t({}^t \vec{a}) = \vec{a}$

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \quad \text{—転置—} \rightarrow \begin{pmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明 ${}^t({}^t \vec{a}) = \vec{a}$

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \quad \text{— 転置 —} \rightarrow \begin{pmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{a}_n \end{pmatrix}$$
$$\text{— 転置 —} \rightarrow ({}^t({}^t \vec{a}_1) \cdots {}^t({}^t \vec{a}_n))$$

転置行列の基本性質

- 転置行列の基本性質 ${}^t({}^t A) = A$
- 証明 ${}^t({}^t \vec{a}) = \vec{a}$

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \quad \text{— 転置 —} \rightarrow \begin{pmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{a}_n \end{pmatrix}$$
$$\text{— 転置 —} \rightarrow ({}^t({}^t \vec{a}_1) \cdots {}^t({}^t \vec{a}_n)) = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- 証明

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_1 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_2 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 & \mathbf{a}_m \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$, $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_1 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_2 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 & \mathbf{a}_m \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$$

AB の (i, j) 成分 $= \mathbf{a}_i \vec{b}_j$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_1 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_2 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 & \mathbf{a}_m \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$$

$$AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

$$\rightarrow {}^t(AB) \text{ の } (j, i) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_1 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_2 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 & \mathbf{a}_m \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$$

$$AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

$$\rightarrow {}^t(AB) \text{ の } (j, i) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

転置行列の性質 No2

- A $m \times n$ 行列、 B $n \times \ell$ 行列 $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

- 証明 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_1 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \vec{b}_\ell \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_1 & \mathbf{a}_2 \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \vec{b}_\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 & \mathbf{a}_m \vec{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$$

$$AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

$$\rightarrow {}^t(AB) \text{ の } (j, i) \text{ 成分} = \mathbf{a}_i \vec{b}_j$$

転置行列の基本性質 No3

- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \vec{b}_\ell)$

転置行列の基本性質 No3

- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \vec{b}_\ell)$

$${}^t B {}^t A = \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell \end{pmatrix} ({}^t \mathbf{a}_1 \ \cdots \ {}^t \mathbf{a}_m)$$

転置行列の基本性質 No3

- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$

$${}^t B {}^t A = \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell \end{pmatrix} ({}^t \mathbf{a}_1 \ \cdots \ {}^t \mathbf{a}_m)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_m \\ {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

転置行列の基本性質 No3

- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \vec{b}_\ell)$

$${}^t B {}^t A = \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell \end{pmatrix} ({}^t \mathbf{a}_1 \ \cdots {}^t \mathbf{a}_m)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_m \\ {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

- ${}^t B {}^t A$ の (j, i) 成分

転置行列の基本性質 No3

- $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \cdots \ \vec{b}_\ell)$
$${}^t B {}^t A = \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 \\ \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell \end{pmatrix} ({}^t \mathbf{a}_1 \ \cdots \ {}^t \mathbf{a}_m)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_1 {}^t \mathbf{a}_m \\ {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_2 {}^t \mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_1 & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_2 & \cdots & {}^t \vec{b}_\ell {}^t \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

- ${}^t B {}^t A$ の (j, i) 成分 $= {}^t \vec{b}_j {}^t \mathbf{a}_i$

転置行列の基本性質 No4

- ${}^t(AB)$ の (j, i) 成分

転置行列の基本性質 No4

- ${}^t(AB)$ の (j, i) 成分 $= \mathbf{a}_i \vec{b}_j$

転置行列の基本性質 No4

- ${}^t(AB)$ の (j, i) 成分 $= \mathbf{a}_i \vec{b}_j$
- ${}^t B {}^t A$ の (j, i) 成分

転置行列の基本性質 No4

- ${}^t(AB)$ の (j, i) 成分 $= \mathbf{a}_i \vec{b}_j$
- ${}^t B {}^t A$ の (j, i) 成分 $= {}^t \vec{b}_j {}^t \mathbf{a}_i$

転置行列の基本性質 No4

- ${}^t(AB)$ の (j, i) 成分 $= \mathbf{a}_i \vec{b}_j$

- ${}^t B^t A$ の (j, i) 成分 $= {}^t \vec{b}_j {}^t \mathbf{a}_i$

- $$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^tA: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^tA: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^tA\vec{y} = y_1{}^t\mathbf{a}_1 + \cdots + y_m{}^t\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^tA: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^tA\vec{y} = y_1{}^t\mathbf{a}_1 + \cdots + y_m{}^t\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^tA: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^tA\vec{y} = y_1{}^t\mathbf{a}_1 + \cdots + y_m{}^t\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^t A: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^t A \vec{y} = y_1 {}^t \mathbf{a}_1 + \cdots + y_m {}^t \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y})$
- 証明 $(\text{左辺}) = {}^t (A\vec{x}) \vec{y}$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^t A: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^t A \vec{y} = y_1 {}^t \mathbf{a}_1 + \cdots + y_m {}^t \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y})$
- 証明 (左辺) $= {}^t (A\vec{x}) \vec{y} = ({}^t \vec{x} {}^t A) \vec{y}$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^t A: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^t A \vec{y} = y_1 {}^t \mathbf{a}_1 + \cdots + y_m {}^t \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y})$
- 証明 (左辺) $= {}^t (A\vec{x}) \vec{y} = ({}^t \vec{x} {}^t A) \vec{y}$
 $= {}^t \vec{x} ({}^t A \vec{y})$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^t A: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^t A \vec{y} = y_1 {}^t \mathbf{a}_1 + \cdots + y_m {}^t \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y})$
- 証明 $(\text{左辺}) = {}^t (A\vec{x}) \vec{y} = ({}^t \vec{x} {}^t A) \vec{y}$
 $= {}^t \vec{x} ({}^t A \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y}) = (\text{右辺})$

なぜ行列の転置を考えるのか

- $A: m \times n$ 行列、 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\rightarrow A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$
- ${}^t A: n \times m$ 行列、 $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$
 $\Rightarrow {}^t A \vec{y} = y_1 {}^t \mathbf{a}_1 + \cdots + y_m {}^t \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$
- 公式 $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y})$
- 証明 (左辺) $= {}^t (A\vec{x}) \vec{y} = ({}^t \vec{x} {}^t A) \vec{y}$
 $= {}^t \vec{x} ({}^t A \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y}) =$ (右辺)
- $(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n)$