

# 3変数の行列式 No2

戸瀬 信之

# 連立1次不等式

- 3元連立1次方程式

# 連立1次不等式

- 3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

# 連立1次不等式

- 3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

- $z$  を消去。  $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

# 連立1次不等式

- 3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

- $z$  を消去。  $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{array}{rclclclcl} & a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z & = & \alpha_1c_2 & \cdots (1) \times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z & = & \alpha_2c_1 & \cdots (2) \times c_1 \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & c_1 \\ \hline a_2 & c_2 \\ \hline \end{array} & x + & \begin{array}{|c|c|} \hline b_1 & c_1 \\ \hline b_2 & c_2 \\ \hline \end{array} & y & = & \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_1 & c_1 \\ \hline \alpha_2 & c_2 \\ \hline \end{array} & \cdots (I) \end{array}$$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots (II)$$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots (II)$$

- $(2) \times c_3 - (3) \times c_2$

# 連立1次不等式No2

- $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \dots (I)$$

- $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots (II)$$

- $(2) \times c_3 - (3) \times c_2$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots (III)$$

# 連立1次不等式 No3

- $-b_1 \times (\text{III}) + b_2 \times (\text{II}) - b_3 \times (\text{I})$

# 連立1次不等式 No3

- $-b_1 \times (\text{III}) + b_2 \times (\text{II}) - b_3 \times (\text{I})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

# 連立1次不等式 No3

- $-b_1 \times (\text{III}) + b_2 \times (\text{II}) - b_3 \times (\text{I})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- N.B.  $\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0$

# 連立1次不等式 No3

- $-b_1 \times (\text{III}) + b_2 \times (\text{II}) - b_3 \times (\text{I})$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- N.B.  $\left| \vec{b} \vec{b} \vec{c} \right| = 0$

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \left( D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

# クラメールの公式

- 仮定

# クラメールの公式

- 仮定  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$  のとき

# クラメールの公式

- 仮定  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$  のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

# クラメールの公式

- 仮定  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$  のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

# 系

- 系 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

# 系

- 系 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

仮定  $D := \det(A) \neq 0$

# 系

- 系 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

仮定  $D := \det(A) \neq 0$

結論  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

# 系

- 系 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

仮定  $D := \det(A) \neq 0$

結論  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

証明  $x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\det(A) = 0$  のときは

- $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$

# $\det(A) = 0$ のときは

- $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- **定理**  $\det(A) = 0$  を仮定する。このとき

# $\det(A) = 0$ のときは

- $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- **定理**  $\det(A) = 0$  を仮定する。このとき  $A\vec{v} = 0$  を満たす  $\vec{v} \neq \vec{0}$  が存在する。

# $\det(A) = 0$ のときは

- $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- 定理  $\det(A) = 0$  を仮定する。このとき  $A\vec{v} = 0$  を満たす  $\vec{v} \neq \vec{0}$  が存在する。
- 注意：2次元の場合はすでに示している

# $\det(A) = 0$ のときは

- $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$
- 定理  $\det(A) = 0$  を仮定する。このとき  $A\vec{v} = 0$  を満たす  $\vec{v} \neq \vec{0}$  が存在する。
- 注意：2次元の場合はすでに示している  
2次正方行列  $B$  が  $\det(B) = 0$  を満たす

# $\det(A) = 0$ のときは

- $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- 定理  $\det(A) = 0$  を仮定する。このとき  $A\vec{v} = \vec{0}$  を満たす  $\vec{v} \neq \vec{0}$  が存在する。
- 注意：2次元の場合はすでに示している  
2次正方行列  $B$  が  $\det(B) = 0$  を満たす

$$\Rightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0} \quad A\vec{v} = \vec{0}$$

# Démonstration

- 設定 :  $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$

# Démonstration

- 設定 :  $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$
- $\vec{a} = \vec{0}$  のとき

# Démonstration

- 設定 :  $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \vec{0}$  のとき

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} - 0 \cdot \vec{b} - 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

# 証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :

# 証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき : 基本変形を用いると

## 証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき : 基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

## 証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき : 基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ただし  $b_{11} \neq 0$

## 証明 No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき : 基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ただし  $b_{11} \neq 0$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow \det(B) = b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

## 証明No2

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき： 基本変形を用いると

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ただし  $b_{11} \neq 0$

$$\det(A) = 0 \longrightarrow \det(B) = b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

# 証明 No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :

# 証明No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

# 証明No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

ただし  $b_{11} \neq 0$

# 証明No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{ただし } b_{11} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

# 証明No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{ただし } b_{11} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

# 証明No3

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{ただし } b_{11} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

# 証明No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :

# 証明No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

## 証明No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

## 証明 No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

## 証明No4

- $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \exists \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$x_0 := -\frac{1}{b_{11}} (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

$$B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

# 余因子

- 3 次正方行列

# 余因子

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

# 余因子

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

# 余因子

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

# 余因子

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{11} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{21} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{31} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \Delta_{11} + a_{21} \Delta_{21} + a_{31} \Delta_{31} \end{aligned}$$

# 余因子

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{11} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{21} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{31} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \Delta_{11} + a_{21} \Delta_{21} + a_{31} \Delta_{31} \end{aligned}$$

# 余因子

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{11} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{21} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{31} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \Delta_{11} + a_{21} \Delta_{21} + a_{31} \Delta_{31} \end{aligned}$$

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} & |A| \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\tilde{A}_{1i}| + (-1)^{i+2} a_{2i} |\tilde{A}_{2i}| + (-1)^{i+3} a_{3i} |\tilde{A}_{3i}| \\ &= a_{1i} \Delta_{1i} + a_{2i} \Delta_{2i} + a_{3i} \Delta_{3i} \end{aligned}$$

# $i$ 列の余因子展開

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} & |A| \\ &= (-1)^{i+1} a_{1i} |\tilde{A}_{1i}| + (-1)^{i+2} a_{2i} |\tilde{A}_{2i}| + (-1)^{i+3} a_{3i} |\tilde{A}_{3i}| \\ &= a_{1i} \Delta_{1i} + a_{2i} \Delta_{2i} + a_{3i} \Delta_{3i} \end{aligned}$$

# 2行の余因子展開

- 3次正方行列

# 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

# 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

## 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

## 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

## 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

## 2行の余因子展開

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

$(i, j)$ -余因子 :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

# 余因子展開（まとめ）

- 3 次正方行列

# 余因子展開（まとめ）

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

# 余因子展開（まとめ）

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$   
 $\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

# 余因子展開（まとめ）

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子： $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

# 余因子展開（まとめ）

- 3 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子： $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

# 余因子展開（まとめ）

- 3次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\tilde{A}_{ij} := A$  から  $i$  行と  $j$  列を除く  $2 \times 2$  行列

- $(i, j)$ -余因子：  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

$$|A| = a_{j1}\Delta_{j1} + a_{j2}\Delta_{j2} + a_{j3}\Delta_{j3}$$

# クラメールの公式（準備No1）

$$\bullet \quad 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (\text{第3列で展開})$$

# クラメールの公式（準備No1）

$$\begin{aligned} \bullet \quad 0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (\text{第3列で展開}) \\ &= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33} \end{aligned}$$

# クラメールの公式（準備 No1）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (\text{第3列で展開})$   
 $= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

# クラメールの公式（準備 No1）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (\text{第3列で展開})$   
 $= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

- $(\Delta_{1k} \ \Delta_{2k} \ \Delta_{3k}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$

# クラメールの公式（準備 No1）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \quad (\text{第3列で展開})$   
 $= a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

- $(\Delta_{1k} \ \Delta_{2k} \ \Delta_{3k}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

# クラメールの公式（準備 No2）

$$\bullet \quad 0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 行で展開})$$

# クラメールの公式（準備No2）

$$\begin{aligned} \bullet \quad 0 &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{第1行で展開}) \\ &= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13} \end{aligned}$$

# クラメールの公式（準備 No2）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{第1行で展開})$   
 $= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

# クラメールの公式（準備 No2）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ (第1行で展開)}$   
 $= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

- $(a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{k1} \\ \Delta_{k2} \\ \Delta_{k3} \end{pmatrix}$

# クラメールの公式（準備 No2）

- $0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 行で展開})$   
 $= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13}$

- 一般に  $i \neq k$  とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

- $(a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{k1} \\ \Delta_{k2} \\ \Delta_{k3} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$

# クラメールの公式

- 余因子行列  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

# クラメールの公式

- 余因子行列  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A}$$

# クラメールの公式

- 余因子行列  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3$$

# クラメールの公式

- 余因子行列  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_3$$

- $|A| \neq 0$  のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。  
(I)  $A$  は正則。

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。  
(I)  $A$  は正則。  
(II)  $\det(A) \neq 0$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) =$   
 $\det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$
- (II) $\Rightarrow$ (I) クラメールの公式

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$
- (II) $\Rightarrow$ (I) クラメールの公式
- (I) $\Rightarrow$ (III)  $A\vec{v} = \vec{0}$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$
- (II) $\Rightarrow$ (I) クラメールの公式
- (I) $\Rightarrow$ (III)  $A\vec{v} = \vec{0}$   
 $\rightarrow A^{-1} \cdot A\vec{v} = A^{-1}\vec{0}$

# 正則性と行列式

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (I) $\Rightarrow$ (II)  $A \cdot A^{-1} = I_3$   
 $\rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$
- (II) $\Rightarrow$ (I) クラメールの公式
- (I) $\Rightarrow$ (III)  $A\vec{v} = \vec{0}$   
 $\rightarrow A^{-1} \cdot A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} \rightarrow \vec{v} = I_3\vec{v} = \vec{0}$

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定 基本行列  $P_1, \cdots, P_\ell$  が存在して

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定 基本行列  $P_1, \cdots, P_\ell$  が存在して  
 $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定 基本行列  $P_1, \cdots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$  —(行列式をとる) $\rightarrow$

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定 基本行列  $P_1, \cdots, P_\ell$  が存在して  
 $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$  —(行列式をとる)—  
 $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(I_3) = 1$

# 正則性と行列式 No2

- 定理 以下は必要十分です。
  - (I)  $A$  は正則。
  - (II)  $\det(A) \neq 0$
  - (III)  $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
  - (IV)  $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$  と行基本変形できます。
- (III) $\Rightarrow$ (II) 既に示している。
- (IV) を仮定 基本行列  $P_1, \cdots, P_\ell$  が存在して  
 $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_n$  —(行列式をとる) $\rightarrow$   
 $\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(I_3) = 1$   
 $\rightarrow \det(A) \neq 0$  (条件 (II))

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  
$$P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

$$\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

$$\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$$

$$\rightarrow \det(A) = 0 \text{ (条件 NOT(II))}$$

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

$$\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$$
$$\rightarrow \det(A) = 0 \text{ (条件 NOT(II))}$$

- **NB** 基本行列  $P$  は  $\det(P) \neq 0$  を満す。

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

$$\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$$
$$\rightarrow \det(A) = 0 \text{ (条件 NOT(II))}$$

- **NB** 基本行列  $P$  は  $\det(P) \neq 0$  を満す。

# 正則性と行列式 No3

- (IV) を否定 基本行列  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在して  $P_\ell \cdots P_1 \cdot A = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

—(行列式をとる)→

$$\det(P_\ell) \cdots \det(P_1) \cdot \det(A) = \det(B) = 0$$
$$\rightarrow \det(A) = 0 \text{ (条件 NOT(II))}$$

- **NB** 基本行列  $P$  は  $\det(P) \neq 0$  を満す。