

I 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めて、それぞれの固有ベクトルを計算しましょう。

行列 A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 6) \end{aligned}$$

から A の固有値は

$$\lambda = 1, 4, 6$$

であることが分る。それぞれの固有ベクトルを求めよう。

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_3 - A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$y = z = 0$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

$\lambda = 4$ のとき

$$\begin{aligned} I_3 - A &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$x = \frac{11}{15}z, \quad y = -\frac{2}{5}z$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15}z \\ -\frac{2}{5}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{15} \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

$\lambda = 6$ のとき

$$\begin{aligned} I_3 - A &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$x = \frac{3}{5}z, \quad y = 0$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

(補足) ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定める。このとき $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$ は

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \ 4\vec{p}_2 \ 6\vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を満す。さらに

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

であるので、 P は正則行列である。このことから

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と対角化できる。

II 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と対応する固有ベクトルを求めましょう。

A の固有多項式を計算すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & \lambda-3 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 4-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4-2\lambda \\ 1-\lambda & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) = (\lambda-3) \end{aligned}$$

となるので A の固有値は

$$\lambda = 1, 2, 3$$

である。それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよう。

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_3 - A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$x = -y, \quad z = 0$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

$\lambda = 2$ のとき

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$x = -z, \quad y = 0$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

$\lambda = 3$ のとき

$$\begin{aligned} 3I_3 - A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から固有ベクトル ${}^t(x \ y \ z)$ は

$$x = -z, \quad y = z$$

を満たし

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルである。

(補足) ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と定める。すると $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (1 \cdot \vec{p}_1 \ 2 \cdot \vec{p}_2 \ 3 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。さらに

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

から P は正則であることが分る。これから

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と対角化できる。