1月

日	火	水
9日 成人の日		
16日 有り。		18日 月曜日 → 休講.

数日以内にwebにレポート問題を
作る。→ 提出は16日.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & * & 2\lambda-4 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2\lambda+4 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & -2 & \lambda-6 \\ -) & 2 & 2\lambda-6 & -4 \\ \hline & 0 & -2\lambda+4 & \lambda-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & \lambda-3 & 1 & 2 \\ -) & \lambda-3 & (\lambda-3)^2 & -2\lambda+6 \\ \hline & 0 & 1-(\lambda-3)^2 & 2\lambda-4 \end{array}$$

$$1-(\lambda-3)^2 = * = -\{(\lambda-3)+1\} \times \{(\lambda-3)-1\}$$

1列で展開

$$= (-1) \begin{vmatrix} * & 2(\lambda-2) \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$* = -(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -(\lambda-2)(\lambda-4) \\ -2(\lambda-2) \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2(\lambda-2) \\ \lambda-2 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(\lambda-2)(\lambda-4) \\ -2(\lambda-2) \end{pmatrix} = (\lambda-2) \begin{pmatrix} -(\lambda-4) \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(\lambda-2) \\ \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$2I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x - y - 2z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 8}$

$$8I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & -24 & 12 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 5 & -2 \\ - & 0 & 5 & -\frac{5}{2} \\ \hline & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$(8I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$Q = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$ 正則

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

$$AQ = Q\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

対角化.

直交行列

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ 実3次正方行列

P: 直交 $\Longleftrightarrow$ ${}^tPP = P\,{}^tP = I_3$.

$\Rightarrow$ 明らか.

$\Leftarrow$

$\Longleftrightarrow$ ${}^tPP = I_3$.

$$\det({}^tPP) = \det(I_3) = 1$$

$= \det({}^tP)\det(P)$

$= (\det(P))^2$

$\det(P) = \pm 1 \neq 0$

$\rightsquigarrow P$: 正則.

${}^tPP = I_3$

P: 正則

$\xrightarrow{\cdot P^{-1}}$ ${}^tP = P^{-1}$ $\longrightarrow$ ${}^tPP = P^{-1}\cdot P = I_3$

$\Longleftrightarrow$
$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix}(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_2 & {}^t\vec{p}_1\vec{p}_3 \\ {}^t\vec{p}_2\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_2 & {}^t\vec{p}_2\vec{p}_3 \\ {}^t\vec{p}_3\vec{p}_1 & {}^t\vec{p}_3\vec{p}_2 & {}^t\vec{p}_3\vec{p}_3 \end{pmatrix}$$

${}^t\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$
$= (\vec{p}_i, \vec{p}_j)$

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$

全ての $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

${}^tPP = I_3$

$\uparrow$

${}^tPP\vec{x} = \vec{x}$

$\uparrow$

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = ({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

${}^tPP = I_3$ $\longrightarrow$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

- $(\vec{a}, \vec{x}) = 0$ (全て $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$)

  $\Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$

① $\vec{x} = \vec{a}$ を代入 $\longrightarrow (\vec{a}, \vec{a}) = 0$

$\longrightarrow \|\vec{a}\| = 0 \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

② $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{a}, \vec{e}_i) = a_i = 0$

全ての i

- A : $m \times n$ 行列

  $A\vec{v} = \vec{0}$ (全ての $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$)

  $\Longleftrightarrow \quad A = O_{m,n}$

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ $\nearrow$ $A = O$

$A\vec{e}_i = \vec{a}_i = \vec{0}$ (全ての i)

$$V(2) = \mathbb{R}\vec{v}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_2 = \{\vec{x}\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

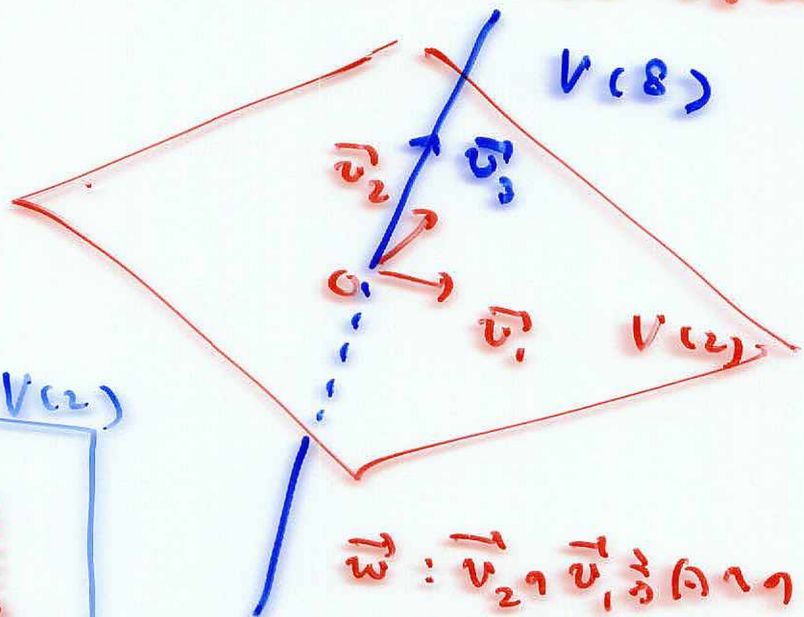
$$V(2) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,;\, Av = 2\vec{v}\}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

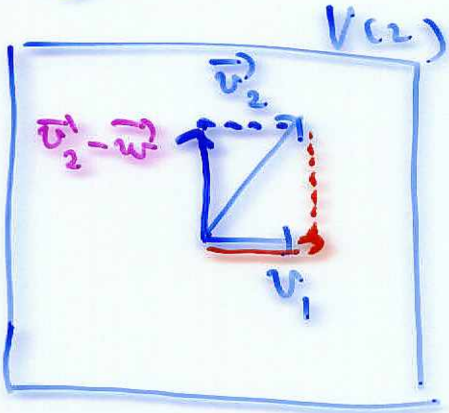
$$V(8) = \mathbb{R}\vec{v}_3$$

$\lambda = 8$ の固有空間.

$V(2) \perp V(8)$



V(2)



$\vec{w}$: $\vec{v}_2$ の $\vec{v}_1$ 方向への正射影

$$\vec{w} = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 = \frac{2}{2}\vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 - \vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2 - \vec{w}\|}(\vec{v}_2 - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$V(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b} \in V(2) \\ \qquad \Rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in V(2) \end{array}\right.$$

$V(2)$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間

+と・で閉じている。

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rightsquigarrow \vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V(2)$

となり。

$V(8)$ も同様 $\vec{p}_3 \in V(8)$

$V(2) \perp V(8)$

$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$

$P = (\vec{p}_1\, \vec{p}_2\, \vec{p}_3)$ は直交行列。

定理 A: 実対称, とする。

ある P: 直交行列が存在し

$AP = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ と対角化できる。

A：実対称.

$(A\vec{v},\vec{v})$ Aの定める2次形式.

$$AP = P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&8\end{pmatrix}$$

$$= ({}^tPA\vec{v},\ {}^tP\vec{v})$$

$$= ({}^tPAP\cdot{}^tP\vec{v},\ {}^tP\vec{v})$$

$$= \left(\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&8\end{pmatrix}\vec{\xi},\ \vec{\xi}\right) \quad \vec{\xi} = {}^tP\vec{v}$$

$$= 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 8\xi_3^2$$

P：直交

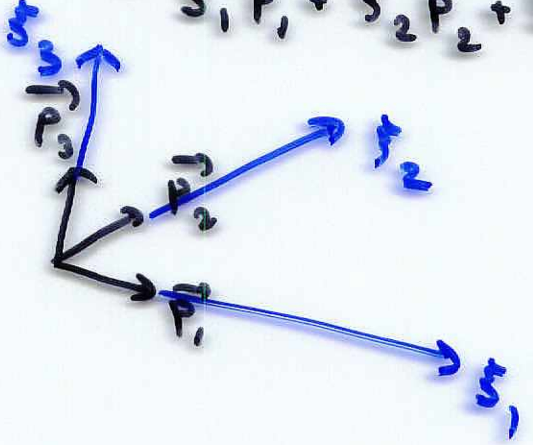
$\Downarrow$

${}^tP$：直交

$Q = {}^tP$

$${}^tQQ = {}^t({}^tP)\,{}^tP = P\,{}^tP = I_3$$

$$\vec{\xi} = {}^tP\vec{v} \iff \vec{v} = P\vec{\xi} = \xi_1\vec{p_1} + \xi_2\vec{p_2} + \xi_3\vec{p_3}$$



$$V = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R}\vec{p_1} + \mathbb{R}\vec{p_2}$$

$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = 0$, $\|\vec{p_1}\| = \|\vec{p_2}\| = 1$

となるよう $\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ を求める.

$\vec{v_2}$ の $\vec{v_1}$ 方向への正射影は $\dfrac{(\vec{v_1}, \vec{v_2})}{\|\vec{v_1}\|^2}\vec{v_1}$

を考える.