B : 3次正方行列

B : 正則 $\iff \det(B) \neq 0$ $\qquad v_1 = v_2 = v_3 = 0$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \iff \left(B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$

$$B\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$c\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow c = 0.$$

$$\exists i: \ \vec{v} = \begin{pmatrix} * \\ v_i \\ * \end{pmatrix}, \quad v_i \neq 0$$

CT 309 p.

$$c\vec{v} = \begin{pmatrix} * \\ c v_i \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \to c v_i = 0$$

$$\downarrow v_i \neq 0$$

$$c = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

row

$\Leftrightarrow$ $\boxed{B\vec{v} = \vec{0}}$ を満たす $\vec{v} \neq \vec{0}$ あり)

$B = \lambda I_3 - A$ が 正則 でない $\Longleftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\lambda = -1, 1, 4.$

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -\lambda^2+3\lambda-1 \\ \lambda-1 \\ -\lambda-1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2\lambda-3 \\ -2 \\ \lambda+1 \end{matrix} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\lambda^2+3\lambda-1 & 2\lambda-3 \\ \boxed{-\lambda-1 \quad \lambda+1} \end{vmatrix}$$

$\uparrow$

3行 += 2行 × (−1)

1行 += 2行 × (2 − λ)

$= (-\lambda-1) \times (1 \; -1)$

$$= -(-\lambda-1)\begin{vmatrix} -\lambda^2+3\lambda-1 & 2\lambda-3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda+4)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$\lambda = -1$ $\qquad$ $\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = 4$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\vec{p}_1 = -\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = 4\vec{p}_3$

$$A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3)$$

$$= (-\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ 4\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad -I_3 - A = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow[\substack{1r+2\\ 2r\times 2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow[2r\times\left(-\frac{1}{5}\right)]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

固有値(−1)に対する
固有ベクトル

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

$\underline{\lambda = 4}$ $\quad 4I_3 - A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 3 & -2 \\ - & 0 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$$

P: 正則 とする $\qquad A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

とする

A: 3次正方行列 $\qquad \Phi_A(\lambda) = \underbrace{\lambda^3 + \cdots}_{3次式} = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

固有値 α, β, γ

CT

3の9p. $\qquad \alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$

$$A\vec{v_1} = \alpha\vec{v_1},\quad A\vec{v_2} = \beta\vec{v_2},\quad A\vec{v_3} = \gamma\vec{v_3}$$

$$\vec{v_i} \neq \vec{0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}) \text{ は正則}}$$

$\Updownarrow$

step 1 $\qquad \Leftarrow \qquad c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} = \vec{0}$

$\qquad\qquad \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} = \vec{0}$

$\qquad \Longrightarrow c_2 = c_3 = 0$

を示す. $\qquad A(c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3})$

$A \cdot \qquad c_2\beta\vec{v_2} + c_3\gamma\vec{v_3} = \vec{0}$

$\gamma \cdot \qquad c_2\gamma\vec{v_2} + c_3\gamma\vec{v_3} = \vec{0}$

$c_2\underbrace{(\beta-\gamma)}_{\neq 0}\vec{v_2} = \vec{0} \xrightarrow{\vec{v_2} \neq \vec{0}} c_2(\beta - \gamma) = 0$

$\rightarrow \boxed{c_2 = 0}$

$c_3\vec{v_3} = \vec{0} \xrightarrow[\vec{v_3} \neq 0]{} \boxed{c_3 = 0}$

step 2

$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ とする.

$$
\begin{array}{rl}
A\cdot & c_1\alpha\vec{v}_1 + c_2\beta\vec{v}_2 + c_3\gamma\vec{v}_3 = \vec{0} \\
\alpha\cdot \; -) & c_1\alpha\vec{v}_1 + c_2\alpha\vec{v}_2 + c_3\alpha\vec{v}_3 = \vec{0} \\
\hline
 & c_2(\beta-\alpha)\vec{v}_2 + c_3(\gamma-\alpha)\vec{v}_3 = \vec{0}
\end{array}
$$

$\underset{\text{step 1}}{\rightsquigarrow}$ $c_2\underbrace{(\beta-\alpha)}_{\neq 0} = c_3\underbrace{(\gamma-\alpha)}_{\neq 0} = 0$

$\longrightarrow$ $c_2 = c_3 = 0$

$\longrightarrow$ $c_1\vec{v}_1 = \vec{0} \xrightarrow[\vec{v}_1 \neq \vec{0}]{} c_1 = 0$

$$A(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3) = (\alpha\vec{v}_1\ \beta\vec{v}_2\ \gamma\vec{v}_3)$$

$$= (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$$

$P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$ は正則 $\left.\begin{array}{l}\alpha\neq\beta\\ \beta\neq\gamma\\ \gamma\neq\alpha\end{array}\right)$ のとき.

$A = P\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}P^{-1}$ と対角化できる.

- $\Phi_A(\lambda)$ が単根しか持たない $\Rightarrow$ A:対角化できる.
- 重根の場合は対角化できない場合もある.

<u>例</u> $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ は対角化できない.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ${}^tA = A$. 実対称行列.

・A 実対称 $\Rightarrow$ A の固有値は全て実.

$\lambda = -1$ $\qquad \lambda = 1$ $\qquad \lambda = 4$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{p}_3$

・ $(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j)$

一般に　A : 実対称. $\alpha \neq \beta$ とする.

$$\left.\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \alpha\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \beta\vec{v}_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

$$(\underbrace{A\vec{v}_1}_{\alpha\vec{v}_1}, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, {}^tA\vec{v}_2) \underset{{}^tA = A}{=} (\vec{v}_1, \underbrace{A\vec{v}_2}_{\beta\vec{v}_2})$$

$$\rightarrow \quad \alpha(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\neq 0}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ とする.

(1) $\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = 0$

を満たす λ を求める.

(2) $\Phi_A(\lambda) = 0$ を満たす λ に対して

$(\lambda I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ を解く.