ベクトルの転置

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto {}^t\vec{a} = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$$

$$\longmapsto {}^t({}^t\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$$\mathfrak{a} = (a_1\ a_2 \cdots a_n) \longmapsto {}^t\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$${}^t({}^t\mathfrak{a}) = (a_1\ a_2 \cdots a_n) = \mathfrak{a}$$

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \longmapsto {}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

m行n列　　　　n行m列

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_m \end{pmatrix} \qquad = ({}^t\mathfrak{a}_1\ {}^t\mathfrak{a}_2 \cdots {}^t\mathfrak{a}_m)$$

$${}^t({}^tA) = A$$

$${}^t({}^tA) = ({}^t({}^t\vec{a}_1) \cdots {}^t({}^t\vec{a}_n)) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n) = A$$

$$A = (a_{ij})$$

i行j列

$${}^tA = (t_{ji})$$

$$t_{ji} = a_{ij}$$

* A : $m \times n$, B : $n \times l$

$\rightsquigarrow AB$: $m \times l$

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad B = (\boxed{\vec{b}_1}\ \vec{b}_2 \cdots \boxed{\vec{b}_l})$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_1 \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{a}_1 \vec{b}_l \\ \mathbf{a}_2 \vec{b}_l \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \vec{b}_l \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

AB の (i,k) 成分 $\mathbf{a}_i \vec{b}_k$

${}^t(AB)$ の (k,i) 成分 $\boxed{\mathbf{a}_i \vec{b}_k}$

$${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ {}^t\vec{b}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_l \end{pmatrix} ({}^t\mathbf{a}_1\ {}^t\mathbf{a}_2 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

${}^tB\,{}^tA$ (k,i) 成分 $\boxed{{}^t\vec{b}_k\ {}^t\mathbf{a}_i}$

$$(a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1 \cdots b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

内積との関係

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= (a_1\ a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

公式 $(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\,\vec{b}$

$$A : m \times n = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n)$$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow A\vec{v} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 + \cdots + v_n \vec{a}_n}_{\in \mathbb{R}^m}$$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^m$

公式

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

$$左 = {}^t(A\vec{v})\,\vec{w} = \cancel{{}^t\vec{v}\,{}^tA}$$

$$({}^t\vec{v}\,{}^tA)\,\vec{w}$$

$$= {}^t\vec{v}\,({}^tA\vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w}) = 右$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$(2,3)$ 余因子 cofactor

$$|A| = a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31}$$

1列の展開

$$= a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

i列の展開

$$= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$$

2行の展開

$$= a_{j1}\Delta_{j1} + a_{j2}\Delta_{j2} + a_{j3}\Delta_{j3}$$

j行の展開

$i \neq k$

$$0 = a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k}$$

余因子行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

Δ (i, j)成分 Δ_{ji}

$\parallel$

$(-1)^{i+j} \det \left(\quad \right)$ i, j

A, B : 3次正方

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

$\uparrow$ 余因子行列

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ ($A\vec{v} = \vec{0}$ かつ $\vec{v} \neq \vec{0}$ をみたす $\vec{v}$ 有り)

NOT(Ⅱ) NOT(Ⅲ)

対偶 (Ⅲ) $\Rightarrow$ (Ⅱ)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ とする.

$B = \lambda I_3 - A$ が正則でない

λ を求めよ.