

Lagrange の極値問題

134

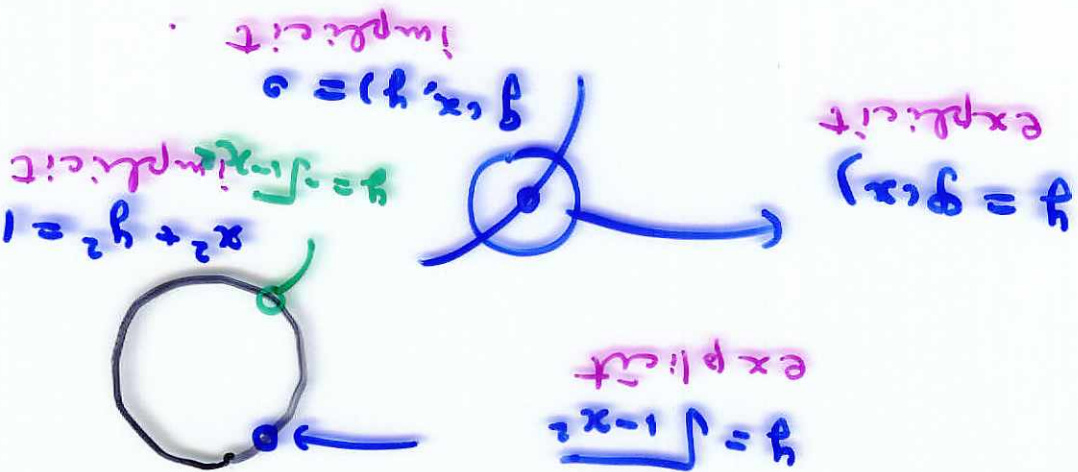
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \rightarrow \text{制約条件}$$

$$z = xy \quad \text{かつ} \quad \rightarrow \text{制約条件}$$

問題: 17

$$f(x, y) = 0 \quad \text{かつ}$$

$$z = f(x, y) \quad \text{かつ} \quad \rightarrow \text{制約条件}$$



CT 284 P.

定理.

$\mathbb{R}^2$

$\cup$

$\cup$ 開集合.

$g: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^k 級.

C^1 $0 < \epsilon$ がある.

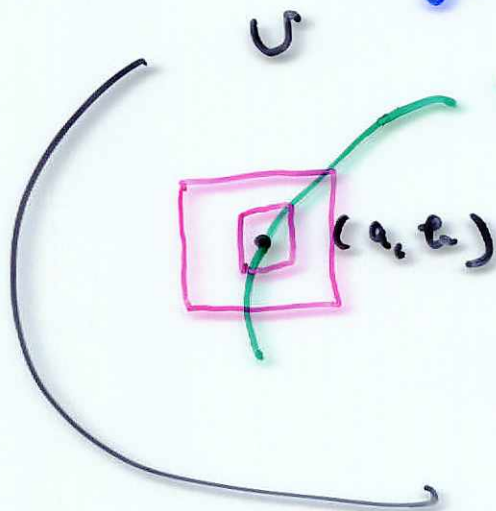
C^k 級 $2 \leq k$.

各点 x 偏微分

f_x, f_y

0 である

$f_x, f_y: C^k$ 級



$g=0$

C^{k+1} 級

$(a, b) \in U$ $f_y(a, b) \neq 0$ である.

$C_\delta = \{ (x, y) ; |x-a| < \delta, |y-b| < \delta, f(x, y) = 0 \}$

$\{ (t, g(t)) ; |t-a| < \delta \}$

である C^k 級 a 附近

$(a-\delta, a+\delta)$

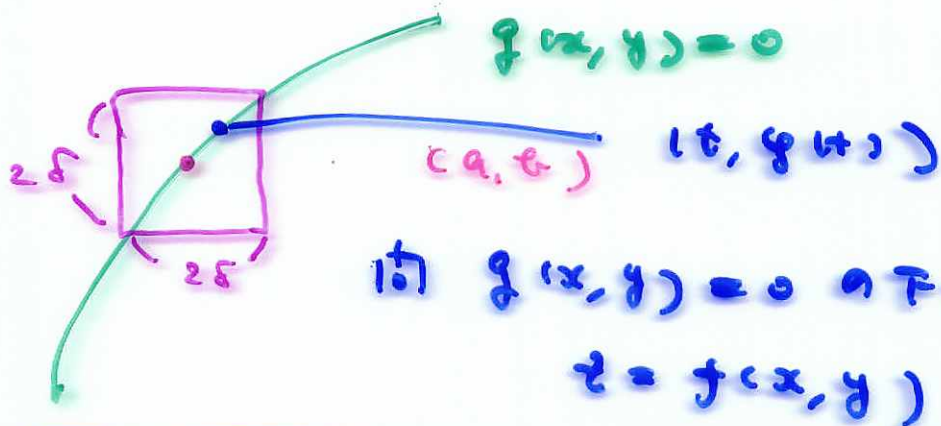
$\xrightarrow{g} \mathbb{R}$

0 である.

$F(t) = f(x(t), y(t))$

$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$

$+ f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$



$g, f: \mathbb{C}'$ 系及 (U, ε)

1) $g(x, y) = 0$ の F について

$f, f_x, f_y: U \rightarrow \mathbb{C}$ 連続.

(a, b) について F について 仮定

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$\leadsto F'(a) = 0 \quad \text{※ 要する.}$$

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \varphi'(t)$$

$$\bullet \quad 0 = F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b) \varphi'(a)$$

$$g(t, \varphi(t)) \equiv 0 \quad \text{※ 注意.}$$

$$\hookrightarrow g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

$$t = a \text{ として}$$

$$\bullet \quad g_x(a, b) + \boxed{g_y(a, b)} \cdot \varphi'(a) = 0$$

$$\text{※ } 0 \text{ ではない.}$$

$$\leadsto f'(a) = - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = -\lambda.$$

$$f_x(a, b) - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} f_y(a, b) = 0$$

" $\lambda \in \mathbb{R}$ ".

$$\lambda = \frac{f_y(a, b)}{f_y(a, b)} \in \mathbb{R}.$$

$$f_x(a, b) = \lambda f_x(a, b)$$

$$f_y(a, b) = \lambda f_y(a, b)$$

定理 仮定 $f_x(a, b)^2 + f_y(a, b)^2 \neq 0$

(a, b) 附近 $\mathbb{R}^2$ 上 $y = g(x)$

OR $x = \varphi(y)$ 附近.

$$f(a, b) = 0$$

(a, b) 附近 $\mathbb{R}^2$ 上.

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(a, b) = \lambda f_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda f_y(a, b) \end{cases}$$

λ 存在.

Lagrange 未定乗数

multiplier

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = f(x, y) = xy. \end{cases}$$



Find the extrema of $f(x, y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{--- (1)} \\ y = \lambda \cdot 2x & \text{--- (2)} \\ x = \lambda \cdot 2y & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$y = 2\lambda \cdot \lambda \cdot 2y \Rightarrow y = 4\lambda^2 y.$$

$$y = 0 \text{ or } \lambda = 0 \text{ or } x = 0 \text{ or } \lambda = 0.$$

$$\rightarrow \text{① } \lambda = \pm \frac{1}{2} \text{ or } \lambda = 0. \quad xy = \frac{1}{2}$$

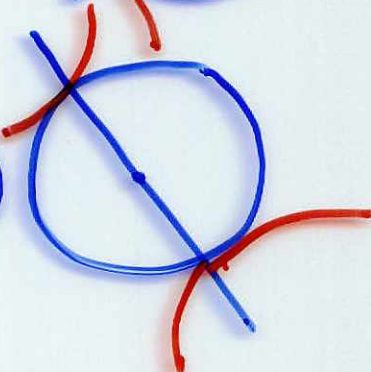
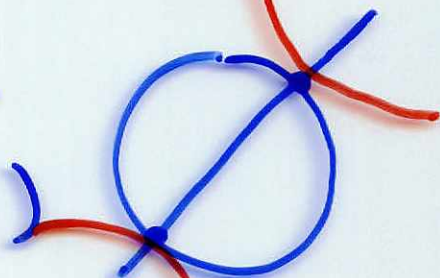
$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \text{ or } \lambda = 0.$$

$$\text{④ } \lambda = \frac{1}{2} \text{ or } \lambda = -\frac{1}{2}. \quad x = y.$$

$$(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{⑤ } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ or } \lambda = \frac{1}{2}. \quad x = -y$$

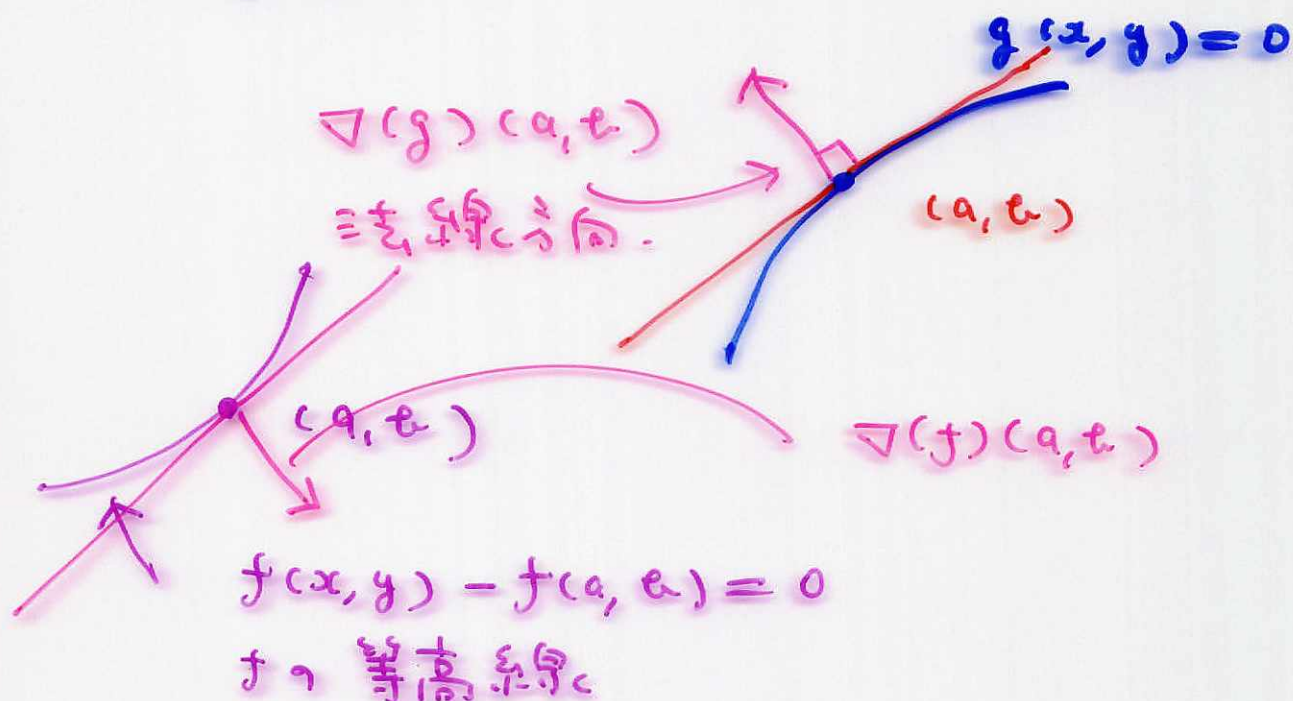
$$(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



$$xy = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f_x(a, b) = \lambda g_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda g_y(a, b) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$



Lagrange の条件. $(g(x, y) = 0$ の
 (a, b) に於ける 3 次条件を満たす
 λ

($f(x, y) = f(a, b)$ の (a, b) に於ける
 3 次条件を満たす λ の値を求めよ)

$\rightarrow$ 2 つの条件から (a, b) を
 特定しよう.

16)

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$$

の Fz

$z = f(x, y)$ の極値問題
を z_1, z_2 として考える。

→ 停留点を探る。
