経済数学入門II（10月24日小テスト解答）
確率論入門II（10月21日小テスト解答）

戸瀬　信之

平成17年10月27日

実2次対称行列 $$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$ を回転行列で対角化せよ。

まず A の固有方程式は

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\Lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda - 7)(\lambda + 1)$$

と計算されますから、A の固有値は $\lambda = 7, -1$ であることが分かります。それぞれの固有ベクトルを求めましょう。

<u>$\lambda = 7$ のとき、</u>

$$\begin{aligned} (7I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x + y = 0 \end{aligned}$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と計算されます。大きさが1の固有ベクトルとして

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選びます。

<u>$\lambda = -1$ のとき、</u>

$$\begin{aligned} (-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad x - y = 0 \end{aligned}$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算されます。大きさが 1 の固有ベクトルで、固有値 $\lambda = 7$ の大きさ 1 である固有ベクトル $\vec{p}_1$ を 90 度回転した

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選びます。

以上の固有ベクトルの選び方によって

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

は回転の行列になります。このとき、P を用いて、行列 A は

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tP$$

と対角化されます。

さらに対称行列 A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

について考えましょう。${}^tP$ が回転行列で、内積を保つことを用いて

$$\begin{aligned}
\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left({}^tPAP{}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\
&= 7\xi^2 - \eta^2
\end{aligned}$$

と座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって変換されます。