

9月26日小テスト解答.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

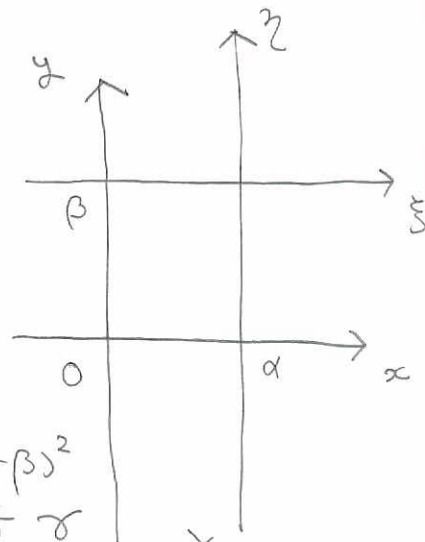
の停留点を求めよ.

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

を解くと $x = 2, y = 0$ を得る.

$$\begin{array}{r} 2 \ 1 \ -4 \\ -) 2 \ 4 \ -4 \\ \hline 0 \ 3 \ 0 \end{array}$$

(補足) $\xi = x - \alpha, \eta = y - \beta$
と座標を平行移動し z を
簡単な形に表すことができる.



$$(\#) \quad x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

$$= (x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(y - \beta) + (y - \beta)^2 + \gamma$$

常に成立するよう α, β, γ を定めよう (両辺を x, y について偏微分すると)

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 2(x - \alpha) + (y - \beta) \\ y + 2x - 2 = (y - \beta) + 2(x - \alpha) \end{cases}$$

これを整理すると

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$$

から $\alpha = 2, \beta = 0$ を得る. $\therefore$ (＃) $\Rightarrow x = \alpha = 2$

$y = \beta = 0$ を得る.

$$4 + 0 + 0 - 16 - 0 = -8$$

から $\gamma = -12$ を得る. $\therefore$ 上の計算より

$$z = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 - 12$$

と表す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

を対角化する

$$z = \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) - 12$$

と表示される。Aを固有値行列を用いて対角化する = 変換する。

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

から

$$\lambda = 1 \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

がある。 $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ の固有ベクトルはそれぞれ

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0, s \neq 0)$$

と表す = 基底で表す。 = 基底

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

とすると P は固有値行列である

$$AP = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

となる。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ と定めると。

$$z = \left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) - 12$$

$$= \left(P^{-1} A P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) - 12$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) - 12 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} y^2 - 12$$

となる。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = x \vec{P}_1 + y \vec{P}_2$$

となるので x 軸, y 軸は

右図のようになる。

$$c > -12 \text{ と } 12$$

$$z = c \text{ となる}$$

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} y^2 = (\sqrt{c+12})^2$$

のグラフは右下図の楕円となる。

これから

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

の極小点 $x=2, y=0$

($\xi=\eta=0$) は極小点

2つあることが分る。

