

I 偏微分法とその応用

II 線形代数の基礎.

III 確率の基礎.

開集合.

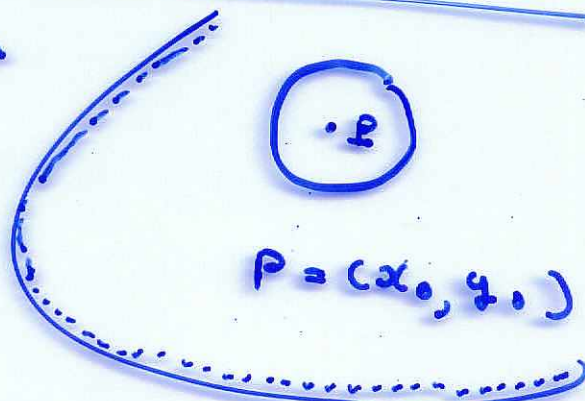
open

$$U \subset \mathbb{R}^2$$

平面

任意の点 $P \in U$ の

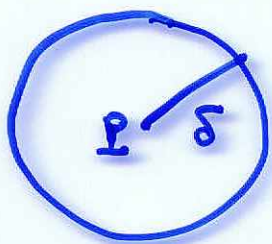
周りに U は入っている.



ある $\delta > 0$ に対して

$$B_\delta(P) \subset U$$

$$\{ (x, y); \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \}$$

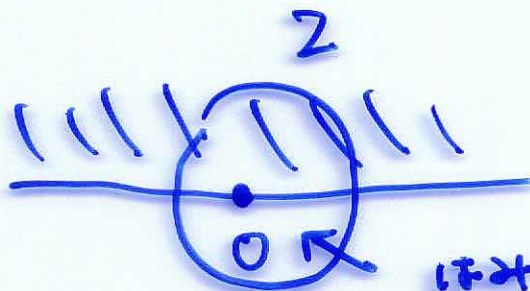


中心 P を半径 δ の閉円盤

$$\textcircled{1} Z = \{ (x, y); y \geq 0 \}$$

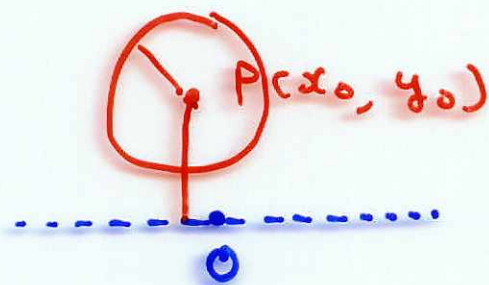
開ではない.

$$0 \in Z$$



はみ出る.

$$\textcircled{2} U := \{(x, y); y > 0\}$$



$$y_0 > 0$$

$$\delta = \frac{y_0}{2} > 0$$

→ 開集合.

$\textcircled{3} \mathbb{R}^2$ は 開集合.

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

↑
例

266p.

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

$(a, t) \in \mathbb{R}^2$ を考える.

$$(a, t)$$

$$F(x) := x^3 + 2t^2x + t^3 \quad (x, t)$$

$$= f(x, t) \quad F'(x) = 3x^2 + 2t^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, t) = f_x(a, t) = F'(a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a}$$

$$= 3a^2 + 2t^2$$

(a, t) に対して
偏微分係数

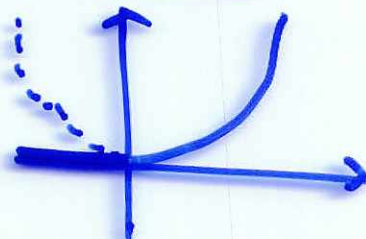
定理

$I = (A, B) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ 微分可能.

$t_0 \in (A, B)$ なる点では必ず極小値 (F)

$$\Rightarrow g'(t_0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} t^2 & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$



$t_0 \leq 0$ ならば $g(t_0)$ はたゞの点では必ずしも極小値ではない

各点で

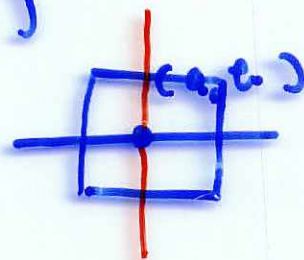
$f: \cup_{(a,b)} \longrightarrow \mathbb{R}$ 偏微分可能

(a, b) なる点では必ずしも極小値ではない

$$\leadsto \textcircled{1} F(x) = f(x, b)$$

$$x = a \text{ なる点では必ずしも}$$

$$F'(a) = 0$$



$$\textcircled{2} G(y) = f(a, y) \quad y = b \text{ なる点では必ずしも}$$

$$\leadsto G'(b) = 0$$

定理 $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 各点: 偏微分可能

$(a, b) \in U$ 極大 OR 極小

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

停留点
stationary
point

例 8.11

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y.$$

$$z_x = 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 = 0$$

$$= 2x + 4y - 6 = 0$$

$$z_y = 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8 = 0$$

$$= 4x + 4y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \\ -) 1 \ 1 \ 2 \\ \hline \ 1 \ 1 \end{array}$$

$$x = 1, y = 1$$

$(1, 1)$ の候補.

→ 実は $(1, 1)$ は
極大でも極小でもない.

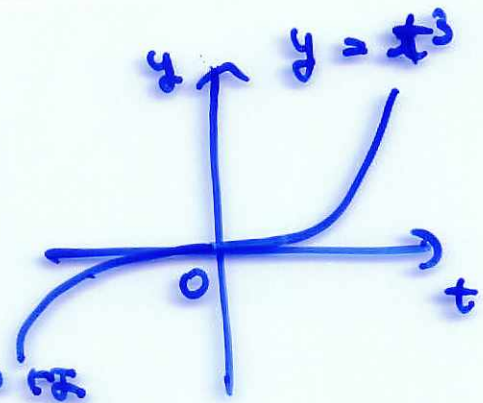
434

$$g(t) = t^3$$

$$g'(t) = 3t^2$$

$$g'(0) = 0 \quad \text{is at } t=0 \text{ is}$$

not a local max or min.



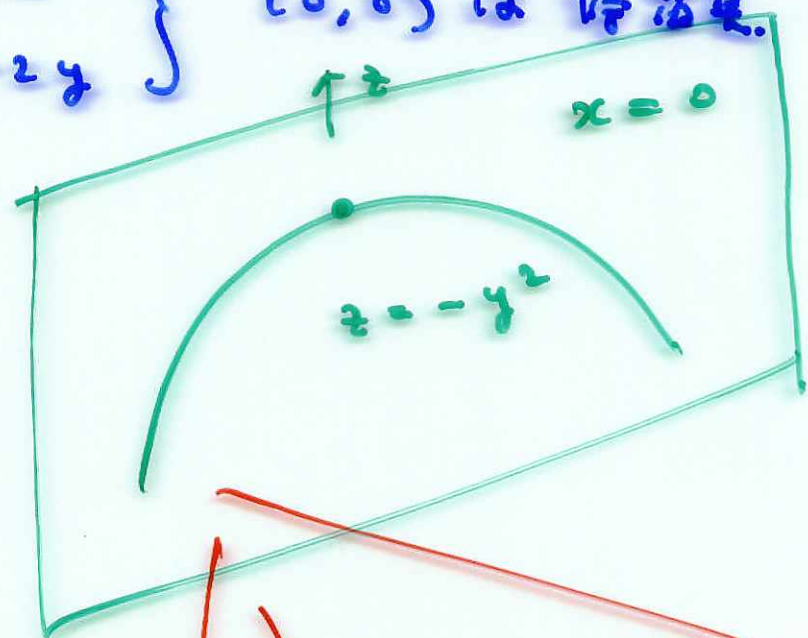
434

$$z = x^2 - y^2$$

269 p. 3.8.1

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = -2y \end{cases}$$

$(0,0)$ is a saddle point.



$(0,0)$ is not a local max or min.

問題

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

Find the saddle point.