

6月6日 系2 微分方程式入門 小テスト

$$f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0 \quad \Sigma \text{ 解け.}$$

特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

から $\lambda = 2, -1$ が解になる。これから一般解は

$$\begin{cases} (f' - 2f)' = -(f' - 2f) \\ (f' + f)' = 2(f' + f) \end{cases}$$

と変換できる。これから

$$\begin{cases} f'(t) - 2f(t) = (f'(0) - 2f(0))e^{-t} \quad \dots ① \\ f'(t) + f(t) = (f'(0) + f(0))e^{2t} \quad \dots ② \end{cases}$$

を得る。① - ② から

$$-3f(t) = (f'(0) - 2f(0))e^{-t} - (f'(0) + f(0))e^{2t}$$

より

$$f(t) = -\frac{1}{3}(f'(0) - 2f(0))e^{-t}$$

$$+ \frac{1}{3}(f'(0) + f(0))e^{2t}$$

が解。

6月20日 系2; 演習 数学 A 内 2.2 x

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{2次元}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

とある. $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \quad \text{2次元}$

$$A'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$$

と定義する.

$$\frac{d}{dt} (A(t) \vec{x}(t)) = A'(t) \vec{x}(t) + A(t) \frac{d}{dt} \vec{x}(t)$$

0... 成る. $B(t) = (\vec{e}_1(t) \quad \vec{e}_2(t))$ とする

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A(t) B(t)) &= (A(t) \vec{e}_1(t) \quad A(t) \vec{e}_2(t))' \\ &= (A'(t) \vec{e}_1(t) + A(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_1(t) \quad A'(t) \vec{e}_2(t) + A(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_2(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (A'(t) \vec{e}_1(t) \quad A'(t) \vec{e}_2(t)) \\ &\quad + (A(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_1(t) \quad A(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_2(t)) \end{aligned}$$

$$= A'(t) B(t) + A(t) B'(t)$$

より

$$(A(t) B(t))' = A'(t) B(t) + A(t) B'(t)$$

0- 例 3. 係数行列 A を与え、

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t)$$

を解く。 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とする。5月30日9

1. 任意 t に $x(t)$ は A の固有値 $\lambda = 5, -1$ に対して

$$P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$AP = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化可能であることが示される。

$$\vec{y}(t) = P^{-1} \vec{x}(t)$$

とすると

$$\frac{d}{dt} \vec{y}(t) = P^{-1} \frac{d}{dt} \vec{x}(t)$$

$$= P^{-1} A \vec{x}(t) = P^{-1} A P \cdot P^{-1} \vec{x}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

$$\therefore \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ と}$$

$$y_1'(t) = 5 y_1(t), \quad y_2'(t) = -y_2(t)$$

$$\therefore \begin{cases} y_1(t) = y_1(0) e^{5t} \\ y_2(t) = y_2(0) e^{-t} \end{cases}$$

を代入する。

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= P \vec{y}(t) \\
 &= P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} \vec{x}(0)
 \end{aligned}$$

と $A \in \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

補足 $2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$e^{tA} = I_2 + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \frac{1}{3!} t^3 A^3 + \dots$$

と定めた。 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ の逆行列は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ である。
 $\Rightarrow$ とすると

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と $A^2 = -2A$ である。

$$A^n = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

より

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(5t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\rightarrow P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と $A \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ である。

第2章 数値解析 1.1 問題

6月20日

I
$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$
$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

を解け。

II
$$a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0$$
$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

を解け。

III
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
 に対して $\lambda - 1 - \dots$ である。

定理 2.11.2 A^{-1} を計算せよ。

IV
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
 に対して A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

A^{-1} を計算せよ。

V
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 に対して

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t)$$

を解け。

VI
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$
 に対して

$$e^{tA}$$

を求めよ。