

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ is a 2×2 matrix. A^n is the n th power of A .
diagonalize

A: 2×2 37 3y

$\Delta S = 0.25 \text{ kJ/K}$

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \vec{v} \perp \vec{v}_1$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = 0$$

国府ベスト

$A \leq B \Rightarrow A \leq C$ $\wedge$ $A \leq D \Rightarrow A \leq E$ $\Rightarrow A \leq F$

$$\Rightarrow (\lambda I_2 - A) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

* $\varphi_1 = A(x)$ A 有 90 个式子.

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & -c \\ -c & 1-d \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{固有値 } \lambda = +5, -1.$$

• $\lambda = 5$ は実数、固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\lambda I_2 - A$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$4x - 2y = 0 \quad 195$$

$$-4x + 2y = 0 \quad 245$$

($\Rightarrow$)

$$\text{固有ベクトル } 2x - y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

eigen-vector

• $\lambda = -1$ は実数、固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

e.v.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v}_1 = 5\vec{v}_1 \quad A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$$

$$A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (A\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = (5\vec{v}_1, -\vec{v}_2)$$

$$= (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$AP = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(P) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0$$

P は 逆行列 3つ あり.

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$(AP)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

"

$$A(P P^{-1})$$

"

$$A I_2 = A$$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

"
 I_2

$$= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

より 2つ あり

$$A^n = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

補足 $\hookrightarrow A, B, C$ 2×2 行列

$$(AB)C = A(BC)$$

結合性。

$$ABC = CBA$$

$$2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ * & c\gamma \end{pmatrix}$$

下を問。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ 0 & c\beta \end{pmatrix}$$

3) 逆行列。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \quad a, b \neq 0$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$A: \mathbb{R}^2$$

$$AB = BA = I_2.$$

逆行列。

$$\left. \begin{array}{l} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{array} \right\} \rightarrow \dots \rightarrow X = Y.$$

逆行列は存在
且、1つだけ。

証明.

$$AX = I_2 \leadsto Y(AX) = YI_2 = Y$$

$$\text{"} \\ (YA)X = I_2X = X$$

A, B : 2×2 行列

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$AX = XA = I_2$ である X がある。

(X : 正則, regular)

$$\det(AX) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{"} \\ \det(A) \det(X)$$

$$\leadsto \det(A) \neq 0.$$

$$A: \text{正則} \Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

($\Leftarrow$) 逆行列
がある。

$$\det(A) = 0$$

$\Rightarrow A$: 正則でない。
不逆。

$$A\vec{v} = \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ である。}$$

A : 正則とすると $XA = AX = I_2$ である X あり

$$I_2: \quad \boxed{XA}\vec{v} = X\vec{0} = \vec{0} \leadsto \vec{v} = \vec{0} \quad \boxed{\text{矛盾}} \quad A: \text{正則}$$

$$A: 2 \times 2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A: \text{invertible} \iff (A\vec{v} = \vec{0} \implies \vec{v} = \vec{0})$$

$$\iff \det(A) \neq 0.$$

$$A: \text{invertible} \iff A\vec{v} = \vec{0} \text{ only } \vec{v} = \vec{0} \\ \text{for } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ or } \mathbb{C}^2.$$

$$\iff \det(A) \neq 0$$

"invertible",

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\parallel \\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

Find.

$$(e^{\alpha t})' = e^{\alpha t} (\alpha t)' \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \alpha e^{\alpha t} \quad \frac{d(e^u)}{du} = e^u$$

$$x'(t) = \alpha x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

३५ तृतीयः प्रश्नः.

$$(x(t) e^{-at})' = x'(t) e^{-at} + x(t) (-a) e^{-at}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$= \alpha x(t) e^{-\alpha t} + x(t) (-\alpha) e^{-\alpha t}$$

$$\equiv 0.$$

例 2.2.2 $f'(t) \equiv 0 \quad (t \in (a, b))$

$$\Rightarrow f^{\#}(t) \equiv c \text{ (定数)}$$

$$\frac{f(t) - f(r)}{t - r} = f'(c) \quad \begin{array}{c} r \in (a, t) \\ c \\ \text{---} \\ a \quad r \quad t \quad t \end{array}$$

$$(e^{-\alpha t} x(t))' \equiv 0$$

$$\leadsto e^{-\alpha t} x(t) \equiv e^{-0} \cdot x(0) \\ = x(0)$$

$$\leadsto x(t) = x(0) e^{\alpha t}$$

定理

$x(t)$: $\mathbb{R}$ 上 1 次 5 分 π 解

$$x'(t) = \alpha x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\alpha t} \cdot x(0)$$

CT 113 page.

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0.$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad \text{齊次方程式.}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{特性方程式.}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) \quad \lambda = 1, 2.$$

$$f'' - (1+2)f' + 1 \cdot 2f = 0$$

$$\begin{cases} f'' - f' = 2(f' - f) \\ f'' - 2f' = f' - 2f \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f' - f)' = 2(f' - f) \\ (f' - 2f)' = (f' - 2f) \end{cases}$$

$$f' - f = e^{2t} (f'(0) - f(0))$$

$$-) \quad f' - 2f = e^t (f'(0) - 2f(0))$$

$$f(t) = e^{2t} (f'(0) - f(0))$$

$$- e^t (f'(0) - 2f(0))$$

157

$$f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0$$

Σ 157.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$