2×2 行列.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ xc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yb \\ yd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xa + yb \\ xc + yd \end{pmatrix}$$

I (1) $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{pmatrix}$$

2行×λ を 1行に+.

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a+c & \lambda b+d \end{pmatrix}$$

1行×λ を 2行に+.

(3) $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1行を λ倍.

(4) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

1行と2行を交換

行基本変形

II. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^2 - (a+d)A$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

単位行列.

$$= (bc - ad) I_2$$

$$\leadsto \quad A^2 - (a+d)A = (bc - ad) I_2$$

$$A^2 - (a+d)A + \overset{\text{det}(A)}{\overline{(ad - bc)}} I_2 = O_2$$

ケーリー・ハミルトンの定理.

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ゼロ行列

CT 217 page.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\overset{\det(A)}{\|}$ $|A| = ad - bc$

Aの行列式

III $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rotation

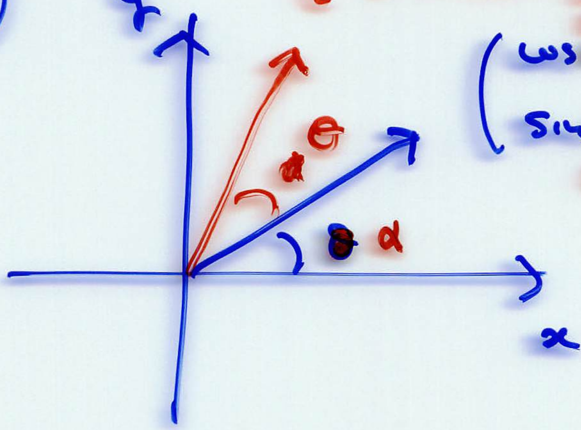
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \sin\alpha \\ \sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc.$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Aの行列式.

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots (1) \\ cx + dy = \beta & \cdots (2) \end{cases}$$

xとyの連立1次方程式.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$(1) \times d - (2) \times b$ $\qquad$ $(1) \times c - (2) \times a$

$$\begin{array}{rl} adx + bdy &= \alpha d \\ -)\ bcx + bdy &= \beta b \\ \hline (ad - bc)x &= \alpha d - \beta b \end{array}$$

α β 入れ替

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$$

$ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

クラメールの公式. CT 206 page.

特に $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\vec{0}$ のとき.

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

$|A|=ad-bc\neq 0$ とする.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{vmatrix}}{|A|}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a & 0\\ c & 0\end{vmatrix}}{|A|}=0.$$

・ <u>定理</u> $|A|\neq 0$ のとき

$$\left[A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}.\right]$$

<u>定理</u> $|A|=0$ のとき.

$$\left(\begin{array}{l}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0} \text{ かつ } \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\vec{0}\\ \text{をみたす } \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \text{ が存在.}\end{array}\right.$$

CT 207 page　　$ad-bc=0$ とする.

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \cdots \text{\#}$$

① $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ は # の解.

② $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ は # の解.

Ⅰ $(c \neq 0 \text{ OR } d \neq 0)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Ⅱ $(a \neq 0 \text{ OR } b \neq 0)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Ⅲ not Ⅰ かつ not Ⅱ の場合.

$a=b=c=d=0$　　$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ 全て解.

定理　$|A|=0 \iff \begin{cases} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ かつ } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \\ \text{をみたす } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ が存在.} \end{cases}$

$\longrightarrow$ 固有値　A^n の計算に使う.

218 page　C-H の定理.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$t = nT$　　　$t = (n+1)T$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　C-H の定理

$$A^2 - 4A + (-5) I_2 = O_2.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\parallel$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$\cancel{-5 + 1 = -4}$

$\cancel{(-5) \cdot 1 = -5}$

$5 - 1 = 4$

$5 \cdot (-1) = -5$

$$A^2 - (5 + (-1)) A + 5 \cdot (-1) I_2 = O_2$$

$A I_2 = I_2 A = A$

$$A^2 - 5A = (-1)A - 5(-1) I_2$$

$$A(A - 5I_2) = (-1)(A - 5I_2)$$

$$A^2 + A = A + I_2$$

$$A(A + I_2) = A + I_2$$

$$A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$$

$$\begin{cases} A(A - 5I_2) = (-1)(A - 5I_2) \\ A(A + I_2) = 5(A + I_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A^2(A - 5I_2) &= A \cdot A(A - 5I_2) \\ &= (-1)A(A - 5I_2) \\ &= (-1)^2(A - 5I_2) \end{aligned}$$

$$A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2)$$

$$\begin{cases} A^{n+1} - 5A^n = (-1)^n(A - 5I_2) \\ A^{n+1} + A^n = 5^n(A + I_2) \end{cases}$$

$$-6A^n = (-1)^n(A - 5I_2) - 5^n(A + I_2)$$

$$\rightsquigarrow A^n = \frac{1}{6}5^n(A + I_2) - \frac{1}{6}(-1)^n(A - 5I_2)$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0$$

も同じ.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ について

A^n を求めよ.