

ポートフォリオ最適化の初歩

リスク分散とは?

A社の株式

x_1
x_2
x_3
$\vdots$
x_{N+1}

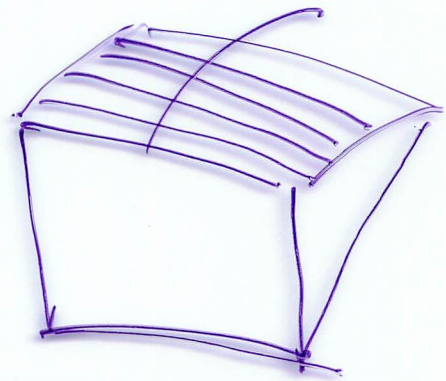
株式の時間系列

r_1
r_2
$\vdots$
r_N

42%の平均

$$r_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}$$

→ r_i は x_i に対する42%の増減



時間系列

time series

$$r_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100$$

= 1株のAの42%増減

= 1単位の増減で
そう、 T_2 金増減

$$\bar{r} = E(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad \text{平均の42%増減}$$

$\bar{r}$ は: リターンに平均

CT193 page

$$V = V(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2 \quad \text{分散}$$

V は: リターンの変動
42%増減

variance.

A 社	B 社
r_1	s_1
r_2	s_2
$\vdots$	$\vdots$
r_N	s_N

2 社の 42 益率の 時間系列.

1 単位の 資金を

$$x + y = 1$$

と 2 分散投資.

$$\begin{pmatrix} x r_1 + y s_1 \\ x r_2 + y s_2 \\ \vdots \\ x r_N + y s_N \end{pmatrix}$$

42 益率.

$$\begin{aligned} E(xr + ys) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x r_i + y s_i) \\ &= x \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i + y \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \\ &= x \bar{r} + y \bar{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(xr + ys) &= \dots \\ &= x^2 V(\underline{r}) + 2xy C_{\underline{r}\underline{s}} + y^2 V(\underline{s}) \end{aligned}$$

1. 5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42.

分散 (variance)

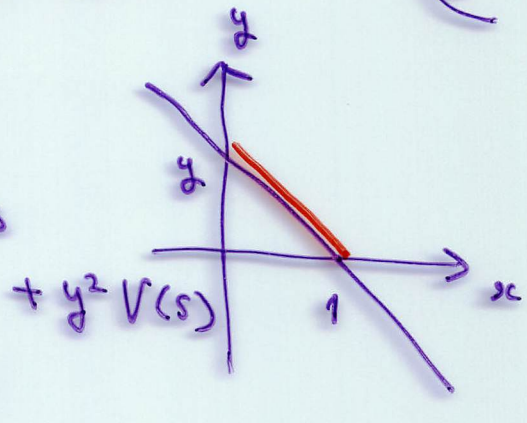
$$C_{\underline{r}\underline{s}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})(s_i - \bar{s})$$

r と s の 共分散.

$$x + y = 1 \quad (x, y) \in [0, 1] \quad (3)$$

$$E = x \bar{r} + y \bar{s} \quad (4)$$

$$V = x^2 V(r) + 2xy C_{rs}$$



(1.)

1.2.1. ($x < 0$ と $y < 0$).

つまり $y < 0$)

期首

期末.



値の増減.

$$E = x \bar{r} + (1-x) \bar{s}$$

$$= x (\bar{r} - \bar{s}) + \bar{s} \quad \leadsto \quad x = \frac{E - \bar{s}}{\bar{r} - \bar{s}}$$

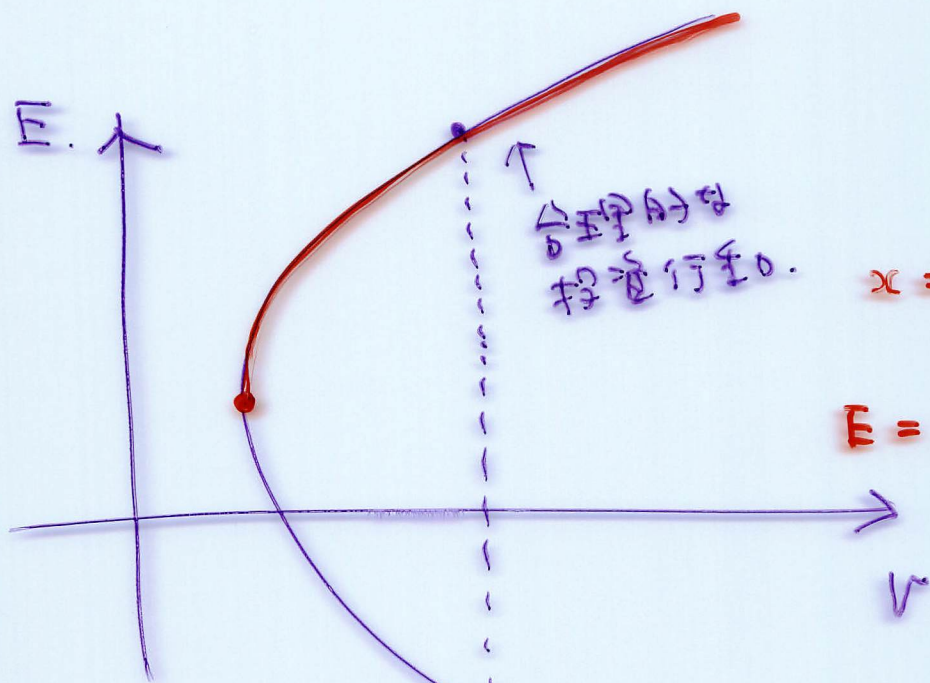
$$V = x^2 V(r) + 2x(1-x) \underbrace{C_{rs}}_{C_{rs}} + (1-x)^2 V(s)$$

$$= x^2 (V(r) - 2C_{rs} + V(s)) \quad \underline{\underline{\leq 0 \text{ 要示!}}}$$

$$+ x(2C_{rs} - V(s)) + V(s)$$

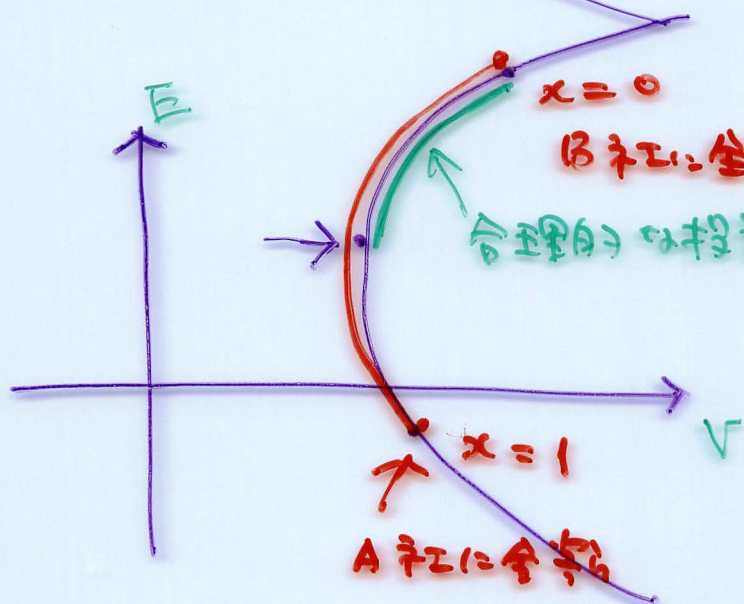
$$= E^2 \frac{(V(r) - 2C_{rs} + V(s))}{(\bar{r} - \bar{s})^2} + E \quad \text{1.2.2式}$$

1.2.2.2. ... = 0 9 = k はあり得る...



$$x = \frac{E - \bar{S}}{\bar{r} - \bar{S}}$$

$$E = x(\bar{r} - \bar{S}) + \bar{S}$$



1° $\mathbb{R}^N$ と $\mathbb{R}^N$ 上の $\frac{N}{2}$.

$$\mathbb{R}^N \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \vec{x}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$N = \mathbb{R}^N$ 上の $\frac{N}{2}$.

ただし $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N$$

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積.

0° $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$

1° $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

2° $(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z}) = \lambda (\vec{x}, \vec{z}) + \mu (\vec{y}, \vec{z})$

$(\vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}) + \mu (\vec{x}, \vec{z})$

証明

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

証明 1° と 2° の性質を用いる.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \end{aligned}$$