4月25日 経済数学入門

小テスト解答

I $r \neq 1$ とする。

$$T_N = 1 + 2 \cdot r + 3r^2 + \cdots + Nr^{N-1} = ?$$

$$
\begin{array}{rl}
T_N = & 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + Nr^{N-1} \\
-)\ rT_N = & \quad\ \ r + 2r^2 + \cdots + (N-1)r^{N-1} + Nr^N \\
\hline
\end{array}
$$

$$(1-r)T_N = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1} - Nr^N$$

から

$$= \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N$$

である。これから

$$T_N = \frac{1-r^N}{(1-r)^2} - \frac{Nr^N}{1-r}$$

II $$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 2$$

を $\{a_n\}$ が満たすとき $\lim_{n \to +\infty} a_n$ を求めよ。

$$\lambda = \frac{1}{4}\lambda + 2$$

を解くと $\lambda = \dfrac{8}{3}$ である

$$
\begin{array}{rl}
a_{n+1} = & \frac{1}{4}a_n + 2 \\
-)\quad \lambda = & \frac{1}{4}\lambda \quad + 2 \\
\hline
a_{n+1} - \lambda = & \frac{1}{4}(a_n - \lambda)
\end{array}
$$

左の計算から

$\left\{a_{n+1} - \frac{3}{8}\right\}$

は公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるので

$$a_n - \frac{8}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(a_0 - \frac{8}{3}\right)$$

を得る。よって

$$a_n = \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(a_0 - \frac{8}{3}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{8}{3} + 0 \times \left(a_0 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$