

第1章 3変数の行列式

1.1 3次の行列式

1.1.1 定義

3次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を定める。このとき行列

$$A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$$

に対して、 A の行列式(determinant) を

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と定義する。

さらに2次の行列式を展開すると

$$|A| = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \quad (1.1)$$

と展開される。ここで

$$i \neq j, j \neq k, k \neq i$$

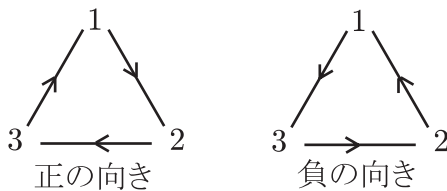
を満たす (i, j, k) に対して

$$a_i b_j c_k$$

が現れていることに注意しよう。このとき (i, j, k) は $3! = 6$ 通りであることが分かる。 $a_i b_j c_k$ の前の符号に関しては

$$i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow i$$

が正の向きの場合に正であり、負の場合に負であることも分かる。



ここで $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ を満たす $(i \ j \ k)$ に対して

$$\sigma(i \ j \ k) \begin{cases} +1 & ((i \ j \ k) \text{ が正の向き}) \\ -1 & ((i \ j \ k) \text{ が負の向き}) \end{cases}$$

と定めます。これを用いると上の3次正方行列 $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$ に対して

$$\det(A) = \sum_{i \neq j, j \neq k, k \neq i} \sigma(i \ j \ k) a_i b_j c_k$$

が成立することに注意しましょう。

1.1.2 列に関する性質

次に (1.1) から次の各列に関する余因子展開が成立することにも注意しよう。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます。

(I) (各列に関する線形性) 例えば1列に関して

$$|\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} \ \vec{b} \ \vec{c}| = \lambda |\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}| + \mu |\vec{\beta} \ \vec{b} \ \vec{c}|$$

が成立します。

(II) (交代性) 相異なる2列を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます。例えば

$$|\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}| = -|\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}|$$

が成立します。

(III) (正規性) 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります。

基本性質から導かれる性質 以上の (I)、(II)、(III) が基本です。これからいくつかの性質を導くことができます。

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります。例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2)$$

が成立します。この場合は 1 列と 2 列を交換して

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから、(1.2) が従います。

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません。例えば

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \det(\vec{a} \ \vec{b} + \lambda \vec{a} \ \vec{c})$$

が成立します。

最後に行列の積の行列式に関する公式を紹介します。

(VI) A と B が 3 次正方行列であるとき

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det B$$

が成立します。

この性質 (V) を証明しましょう。そのために B の第 j 列 $\vec{b}_j$ を

$$\vec{b}_j = b_{1j}\vec{e}_1 + b_{2j}\vec{e}_2 + b_{3j}\vec{e}_3$$

と標準単位ベクトルの定数倍として書きましょう。このときそして

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$$

と行列 A を列ベクトル表示します。すると

$$A\vec{b}_j = b_{1j}A\vec{e}_1 + b_{2j}A\vec{e}_2 + b_{3j}A\vec{e}_3 = b_{1j}\vec{a}_1 + b_{2j}\vec{a}_2 + b_{3j}\vec{a}_3 \quad (1.3)$$

を得ます。このことを用いて、証明すべき式の左辺を計算していくと

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A\vec{b}_1 \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3) \\ &= \det\left((b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2 + b_{31}\vec{a}_3) \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3\right) \\ &= b_{11}\det(\vec{a}_1 \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3) + b_{21}\det(\vec{a}_2 \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3) + b_{31}\det(\vec{a}_3 \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3) \end{aligned}$$

となります。次に第2列を(1.3)を用いて展開します。例えば $\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ A\vec{b}_3) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_1 \ A\vec{b}_2 \ A\vec{b}_3) &= \det\left(\vec{a}_1 \ (b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 + b_{32}\vec{a}_3) \ A\vec{b}_3\right) \\ &= b_{22} \det\left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ A\vec{b}_3\right) + b_{32} \det\left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_3 \ A\vec{b}_3\right)\end{aligned}$$

と計算されます。これと同様の計算を残る2項にも行くと

$$\begin{aligned}\det(AB) &= b_{11}b_{22} \det\left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ A\vec{b}_3\right) + b_{11}b_{32} \det\left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_3 \ A\vec{b}_3\right) \\ &\quad + b_{21}b_{12} \det\left(\vec{a}_2 \ \vec{a}_1 \ A\vec{b}_3\right) + b_{21}b_{32} \det\left(\vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ A\vec{b}_3\right) \\ &\quad + b_{31}b_{12} \det\left(\vec{a}_3 \ \vec{a}_1 \ A\vec{b}_3\right) + b_{31}b_{22} \det\left(\vec{a}_3 \ \vec{a}_2 \ A\vec{b}_3\right)\end{aligned}$$

を得ます。最後の式の6項の第3列を(1.3)によって展開すると

$$\begin{aligned}\det(AB) &= b_{11}b_{22}b_{33} \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) + b_{11}b_{32}b_{23} \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_2) \\ &\quad + b_{21}b_{12}b_{33} \det(\vec{a}_2 \ \vec{a}_1 \ \vec{a}_3) + b_{21}b_{32}b_{13} \det(\vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_1) \\ &\quad + b_{31}b_{12}b_{23} \det(\vec{a}_3 \ \vec{a}_1 \ \vec{a}_2) + b_{31}b_{22}b_{13} \det(\vec{a}_3 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_1) \\ &= b_{11}b_{22}b_{33} \cdot (1 \ 2 \ 3) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) + b_{11}b_{32}b_{23} \cdot (1 \ 3 \ 2) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \\ &\quad + b_{21}b_{12}b_{33} \cdot (2 \ 1 \ 3) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) + b_{21}b_{32}b_{13} \cdot (2 \ 3 \ 1) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \\ &\quad + b_{31}b_{12}b_{23} \cdot (3 \ 1 \ 2) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) + b_{31}b_{22}b_{13} \cdot (3 \ 2 \ 1) \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \\ &= \det(B) \cdot \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)\end{aligned}$$

を得ます。

1.1.3 ベクトルの外積

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の外積

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を定めます。外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$$

を満たします。そのために公式

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$$

が成立することに注意します。これは、左辺の第1列の余因子展開から分かります。この公式を用いると

$$(\vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{b} \ \vec{b} \ \vec{c}) = 0$$

が従い、 $\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります。また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です。

次に $\vec{b} \times \vec{c}$ の大きさについて注意します。2本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます。 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします。このとき

$$\begin{aligned} S &= \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \sin \theta \\ &= \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\vec{b}, \vec{c})}{\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|} \right)^2} \\ &= \sqrt{\|\vec{b}\|^2 \cdot \|\vec{c}\|^2 - (\vec{b}, \vec{c})^2} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} S^2 &= \|\vec{b}\|^2 \cdot \|\vec{c}\|^2 - (\vec{b}, \vec{c})^2 \\ &= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \|\vec{b} \times \vec{c}\|^2 \end{aligned}$$

を得ます。すなわち

$$S = \|\vec{b} \times \vec{c}\|$$

を示しました。このことを用いて、3 次の行列式の幾何的な性質について説明します。

3本のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行6面体の体積を V とします。 $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます。すると垂直方向 $\vec{b} \times \vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると、高さ h は

$$h = \|\vec{a}\| \cdot \cos \varphi = \left\| \vec{a}\right\| \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \times \vec{c}\|} = \left\| \frac{(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})}{\vec{b} \times \vec{c}} \right\|$$

と計算されます。これから

$$V = S \cdot h = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \left\| \frac{(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})}{\vec{b} \times \vec{c}} \right\| = |(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})| = |\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})|$$

となります。

1.1.4 行に関する性質

3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

に対して、その転置行列を

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

と定めます。この転置行列 tA の行列式と A の行列式の関係について考えましょう。

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= |A| \end{aligned}$$

より公式

$$|{}^tA| = |A| \quad (1.4)$$

が成立します。この公式を用いると行列式の行に関する性質を導くことができます。以下3次正方行列の行ベクトルを太文字を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

のように表示します。

行に関する余因子展開も成立します。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(I) (行に関する線形性) 例えば 2 行に関して

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

が成立します。この公式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{a} & {}^t(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) & {}^t \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{a} & \lambda_1 {}^t \mathbf{b}_1 + \lambda_2 {}^t \mathbf{b}_2 & {}^t \mathbf{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{a} & {}^t \mathbf{b}_1 & {}^t \mathbf{c} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} {}^t \mathbf{a} & {}^t \mathbf{b}_2 & {}^t \mathbf{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明されます。

(II) (交代性) 相異なる 2 行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます。

例えば

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

が成立します。これは列に関する交代性と (1.4) を用いると証明できます。

(IV) 相異なる 2 行が等しい場合、行列式は 0 になります。例えば

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = 0$$

が成立します。

(V) $i \neq j$ とします。 i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません。例えば

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

が成立します。これは行列式の値を計算するときに大事な公式です。

1.2 連立1次方程式と行列式

1.2.1 クラメールの公式 (1)

ここで x, y, z に関する3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots (3) \end{cases}$$

を考えます。2元連立方程式に帰着させるために、 z を消去します。そのために $(1) \times c_2 - (2) \times c_1$ を考えると

$$\begin{array}{rcl} a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z & = & \alpha_1c_2 \quad \cdots (1) \times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z & = \alpha_2c_1 \quad \cdots (2) \times c_1 \\ \hline \left| \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array} \right| y & = & \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{array} \right| \quad \cdots (I) = (1) \times c_2 - (2) \times c_1 \end{array}$$

を得ます。同様に $(1) \times c_3 - (3) \times c_1$ と $(2) \times c_3 - (3) \times c_2$ を考えると

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| y = \left| \begin{array}{cc} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{array} \right| \quad \cdots (II) = (1) \times c_3 - (3) \times c_1$$

$$\left| \begin{array}{cc} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{array} \right| y = \left| \begin{array}{cc} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{array} \right| \quad \cdots (III) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

を得ることができます。

ここで、 $-b_1 \times (III) + b_2 \times (II) - b_3 \times (I)$ を余因子展開を用いて計算すると

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{ccc} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| y = \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|$$

が従います。ここで

$$\left| \begin{array}{ccc} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| = 0 \quad (1.5)$$

から

$$Dx = \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \quad \left(\text{ただし } D = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \right)$$

が得られます。従って $D \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|$$

が得られました。 y と z についても同様な解の公式があり、次の定理が証明できます。

定理 1.1 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立 1 次方程式 (1),(2),(3) の

解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます。

演習 1.1 $a_1 \times (III) - a_2 \times (II) + a_3 \times (I)$ を計算して定理 1.1 の y の公式を導いてください。

系 1.1 3 次正方行列 A の行列式が 0 でないとします。すなわち

$$\det(A) \neq 0$$

と仮定します。このとき

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

が成立します。これは斉次方程式 (*homogeneous equation*)

$$A\vec{v} = \vec{0}$$

には自明解 $\vec{v} = \vec{0}$ しか存在しないことを意味します。

1.2.2 $\det(A) = 0$ の場合は

前の節で 3 次正方行列 A に対して、 $\det(A) \neq 0$ ならば

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

が成立することを示しました。

ここでは

$$\det(A) = 0$$

を仮定して

$$A\vec{v} = \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在することを示します。

まず

$$A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$$

の第1列 $\vec{a}$ が $\vec{a} = \vec{0}$ を満たすときについて考えます。このときは

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{0} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

から、連立1次方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ に非自明解が存在することが分かります。

次に $\vec{a} \neq \vec{0}$ の場合を考えます。このとき、 A を行基本変形して

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

とできます。しかも、ここで $b_{11} \neq 0$ が成立します。

行基本変形によって、行列式が0であることは変わりませんから

$$0 = \det(B) = b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

が成立します。従って

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

を得ます。これから

$$\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

を満たす解

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が存在します。ここで、さらに

$$x_0 = -\frac{1}{b_{11}} \cdot (b_{12}y_0 + b_{13}z_0)$$

と定めます。このとき

$$B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

が成立します。

以上で次の定理を証明しました。

定理 1.2 3 次正方行列 A が

$$\det(A) = 0$$

を満たすとしします。このとき

$$pA\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ が存在します。

1.2.3 クラメールの公式 (2)

ここで 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の余因子展開を用いて、行列の逆行列について考えてみます。余因子展開のことを念頭に $\tilde{A}_{ij}$ を A の i 行と j 列を除いた 2 次正方行列とします。このとき

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

と定めます。これを用いると第 1 列の余因子展開は

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|\tilde{A}_{11}| - a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{31}|\tilde{A}_{31}| \\ &= a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} \end{aligned}$$

となります。一般に、第 i 列の余因子展開は

$$|A| = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + a_{3i}\Delta_{3i}$$

と表すことができます。

また、第 2 行の余因子展開は

$$\begin{aligned} |A| &= -a_{21}|\tilde{A}_{21}| + a_{22}|\tilde{A}_{22}| - a_{23}|\tilde{A}_{23}| \\ &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} \end{aligned}$$

となり、一般に、第 j 行の余因子展開は

$$|A| = a_{j1}\Delta_{j1} + a_{j2}\Delta_{j2} + a_{j3}\Delta_{j3}$$

と表されます。

ここで第 1 列と第 3 列が等しい行列式

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

を第 3 列で展開すると

$$a_{11}\Delta_{13} + a_{21}\Delta_{23} + a_{31}\Delta_{33} = 0$$

を得ます。同様に $i \neq k$ とすると

$$a_{1i}\Delta_{1k} + a_{2i}\Delta_{2k} + a_{3i}\Delta_{3k} = 0$$

が成立します。

他方、第 1 行と第 2 行が等しい行列式

$$0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

を第 1 行で展開すると

$$a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{12} + a_{23}\Delta_{13} = 0$$

を得ます。同様に $i \neq k$ とすると

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + a_{i3}\Delta_{k3} = 0$$

が成立します。

ここで、余因子行列を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

と定めると

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

が成立します。これから $\det(A) \neq 0$ のとき A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

が成立します。この公式をクラメールの公式と呼びます。

さらに行列 A の正則性に関して次の定理が成立することが分かります。

定理 1.3 3 次正方行列 A に対して、次の条件は全て同値です。

(I) A は正則です。

(II) $\det(A) \neq 0$

(III) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(IV) $A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$ と行基本変形できます。

(I) $\Rightarrow$ (II) A が正則とします。このとき

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

の両辺の行列式をとると

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

が従います。これから

$$\det(A) \neq 0$$

を得ます。

(II) $\Rightarrow$ (I) これは、上のクラメル公式の証明で示されています。

(I) $\Rightarrow$ (III) A が正則であるとの仮定の下で

$$A\vec{v} = \vec{0}$$

を考えます。この両辺に A^{-1} を左から掛ければ

$$\vec{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

が従います。

(III) $\Rightarrow$ (I) この対偶

$$\text{NOT (I)} \Rightarrow \text{NOT (III)}$$

を示せば十分ですが、これは定理 1.2 で示した内容です。

(IV) について 条件 (IV) を仮定します。すなわち行基本変形で

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_3$$

と変形されたと仮定します。このとき基本行列 $P_1, \dots, P_\ell$ が存在して

$$P_\ell \cdots P_1 \cdot A = I_3$$

が成立します。ここで、両辺の行列式を取ると

$$\det(P_1) \cdots \det(P_\ell) \cdot \det(A) = 1$$

から

$$\det(A) \neq 0$$

を得ます。以上から条件 (IV) から条件 (II) が示されました。

次に (III) が成立するとします。もし A を行基本変形して階数が 3 未満になったとします。このとき A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3$$

のいずれかに変形されます。しかし、これらの A は斉次方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ は非自明解を持ちます。これは、前提 (III) に反します。従って、 A は階数 3 となることが従います。