5月25日 小テスト 解答

I (1) $\left\{(1-2x)^5\right\}' = \dfrac{du^5}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \qquad (u=1-2x)$

$= 5u^4\cdot(-2)$

$= -10(1-2x)^4$

(2) $\left\{\dfrac{1}{(3x-2)^5}\right\}' = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{u^5}\right)\cdot\dfrac{du}{dx} \qquad (u=3x-2)$

$= -\dfrac{5}{u^6}\cdot 3 = -\dfrac{15}{(3x-2)^6}$

(3) $\left\{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4\right\}' = \dfrac{du^4}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \qquad \left(u=\dfrac{x-1}{x}\right)$

$= 4u^3\cdot\dfrac{(x-1)'x-(x)'(x-1)}{x^2}$

$= 4\dfrac{(x-1)^3}{x^3}\cdot\dfrac{1}{x^2} = 4\dfrac{(x-1)^3}{x^5}$

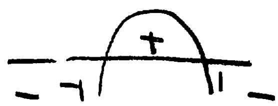
(4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}\right)' = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)\cdot\dfrac{du}{dt} \qquad u=1+t+t^2$

$= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{u\sqrt{u}}\cdot(2t+1) = -\dfrac{2t+1}{2(1+t+t^2)^{\frac{3}{2}}}$

Ⅱ　$y = \dfrac{x}{1+x^2}$ の増減表.

$$y' = \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$



$$y' \gtreqqless 0 \iff 1-x^2 \gtreqqless 0 \iff \left\{\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x = \pm 1 \\ x < -1 \text{ OR } x > 1 \end{array}\right\}$$

であり.

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

5月30日 演習小テスト

I

(1) $\left\{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+t^2)'$

$= \frac{3}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t$

$= 3t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 3t\sqrt{1+t^2}$

(2) $\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)' = \frac{(t^2)'(1+t^2) - t^2(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$

$= \frac{2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2}$

$= \frac{2t}{(1+t^2)^2}$

(3) $\left\{\frac{1}{(x^2+1)^3}\right\}' = -\frac{3}{(x^2+1)^4}(x^2+1)'$

$= -\frac{6}{(x^2+1)^4}$

(4) $\left\{(3-2x^2)^3\right\}' = 3(3-2x^2)^2(3-2x^2)'$

$= 3(3-2x^2)^2 \cdot (-4x)$

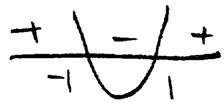
$= -12x(3-2x^2)^2$

II　$y = x + \frac{1}{x}$

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

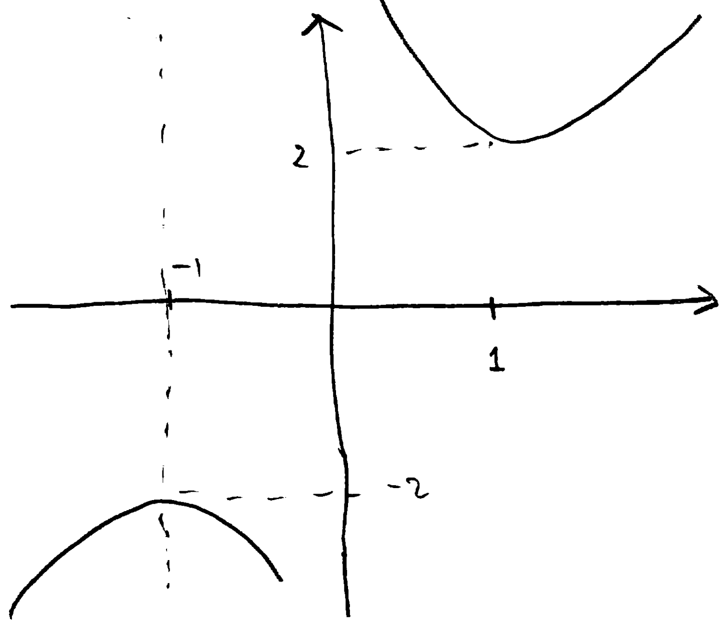
$x \neq 0$ のとき $x^2 > 0$ であるので

$y' \gtreqless 0 \iff x^2 \gtreqless 1$



から 次の増減表を得る.

	-1		0		1	
+		−		−		+
↗	−2	↘		↘	2	↗



$x \to +0$ のとき $\frac{1}{x} \to +\infty$ から

$x + \frac{1}{x} \to 0 + \infty = +\infty$.

$x \to -0$ のとき $\frac{1}{x} \to -\infty$ から

$x + \frac{1}{x} \to 0 - \infty = -\infty$

6月1回 微分積分小テスト解答

I (1) $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$

(2) $(e^{3x})' = 3e^{3x}$

(3) $(e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x\, e^{-x^2}$

(4) $$(xe^{3x})' = (x)' e^{3x} + x (e^{3x})'$$
$$= e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}$$
$$= e^{3x}(1+3x)$$

(5) $$\{\log(1+x^2)\}' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)'$$
$$= \frac{2x}{1+x^2}$$

(6) $$(x\log x)' = (x)'\log x + x(\log x)'$$
$$= \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

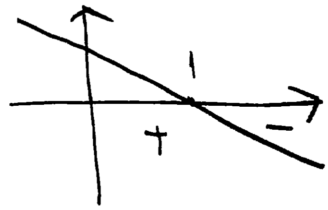
(7) $(x^{\frac{2}{3}})' = ?$ 仮に $(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ を用いて.

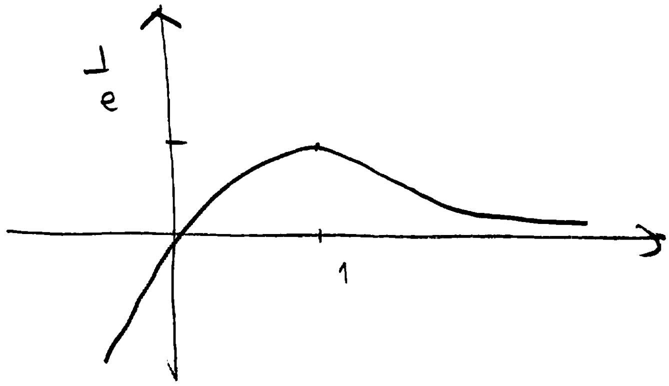
$$(x^{\frac{2}{3}})' = (x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}})' \qquad u = x^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{du^2}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \, \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

II　$y = xe^{-x}$ の増減表.

$$y' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} + x\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$$

x		1	
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$





$y \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$　にまず注意しよう

次に

$x \to +\infty$ のとき　$\dfrac{x}{e^x} \to 0$

$x \to -\infty$ のとき　$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \\ e^{-x} \to +\infty \end{array}\right)$ から

$y = xe^{-x} \longrightarrow +\infty$

に注意しよう.

6月6日演習の解答

I $f'(x)=3f(x)$, $f(0)=5$ を満たす $f(x)$ を求める。

$$f(x)=f(0)e^{3x}=5e^{3x}$$

II (1) $\sqrt[3]{0.95} \fallingdotseq ?$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ とする。 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

$$\begin{aligned} f(0.95) &\fallingdotseq f(1)+f'(1)(1-0.95) \\ &= 1+\frac{1}{3}\cdot(-0.05) \\ &= 0.983\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0.983 \\ 3\,\overline{)\,2.95} \\ 27 \\ \hline 25 \\ 24 \\ \hline 10 \\ 3 \\ \hline 10 \end{array}$$

(2) $\log 0.95 \fallingdotseq ?$

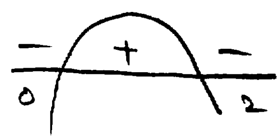
$f(x)=\log x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(0.95) &\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot(1-0.95) \\ &= 0+1\cdot(-0.05)=-0.05 \end{aligned}$$

III $y=t^2e^{-t}$ の増減表

$$y'=2te^{-t}+t^2\cdot(-e^{-t})=e^{-t}(2t-t^2)$$

$$y' \gtreqqless 0 \iff 2t-t^2 \gtreqqless 0$$

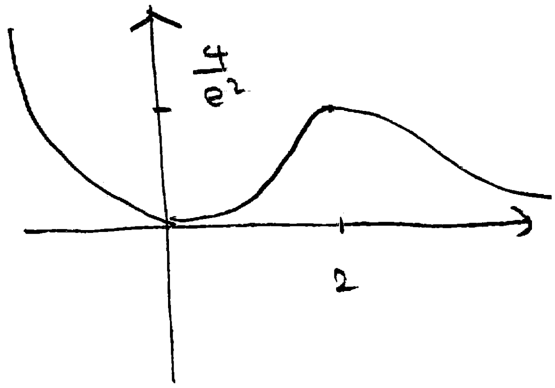


から増減表は

	0		2	
−	0	+	0	−
↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

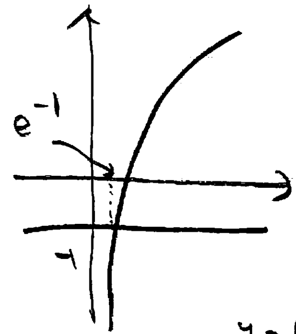
$t \to +\infty$ のとき　$\dfrac{t^2}{e^t} \to 0$　（いつか示する）

$t \to -\infty$ のとき　$\left.\begin{array}{l} t^2 \to +\infty \\ e^{-t} \to +\infty \end{array}\right\}$ から　$y \to +\infty$



IV　$y = t \log t$　$(t > 0)$ の増減表

$$y' = (t)' \log t + t (\log t)'$$
$$= \log t + 1$$



$y = \log t$

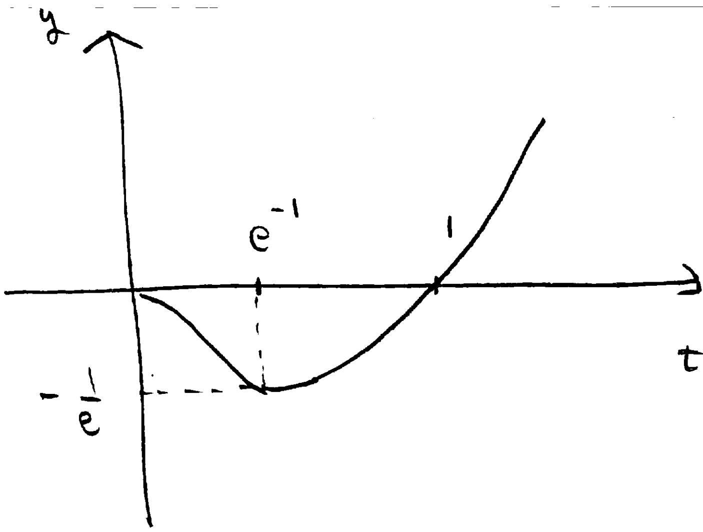
t	(0)		e^{-1}	
y'		$-$	0	$+$
y	(0)	$-$	$-\frac{1}{e}$	$+$

$t \to +0$ のとき　$s = -\log t \to +\infty$ であるので

$$y = t \log t = -\frac{s}{e^s} \to 0$$

$t \to +\infty$ のとき　$\left.\begin{array}{l} \log t \to +\infty \\ t \to +\infty \end{array}\right)$ から $\log t \to +\infty$

以上からグラフは



V　$y = f(t) = \log(1+t)$ について　$y^{(n)}(t) = ?$

$$y' = \frac{1}{1+t}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad y''' = \frac{2}{(1+t)^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{(1+t)^4}, \quad f^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+t)^5}$$

から　$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+t)^n}$　と予想する.

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(-n)}{(1+t)^{n+1}}$$

$$= (-1)^{n+1-1}\frac{\{(n+1)-1\}!}{(1+t)^{n+1}}$$

を得るので 帰納法から この予想は正しい.