

6月20日 演習 1.7 21 角3分

1

I $y = f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \therefore \text{したがって } f^{(n)}(t) = ?$

$$f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}}, \quad f''(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t^2\sqrt{t}}$$

$$f^{(3)}(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t^3\sqrt{t}}$$

$$f^{(4)}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t^4\sqrt{t}}$$

から

$$(*) \quad f^{(n)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{t^n\sqrt{t}}$$

と予想される。これを証明する。

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{t}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \{2(n+1)-1\}}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{t}}$$

から (*) が成立する。これを帰納法で示す。

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2^n} \cdot \frac{1}{t^n\sqrt{t}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \cdot \frac{1}{t^n\sqrt{t}} \end{aligned}$$

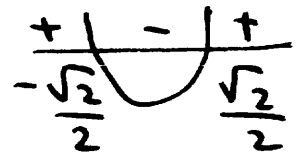
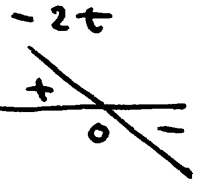
と整理して示す。これは正しい。

II $y = e^{-t^2}$ の 増減表.

$$y' = (-2t) e^{-t^2}$$

$$y'' = (-2) \cdot e^{-t^2} + (-2t)^2 e^{-t^2}$$

$$= 4(t^2 - \frac{1}{2}) e^{-t^2}$$



∴ 増減表は 下図.

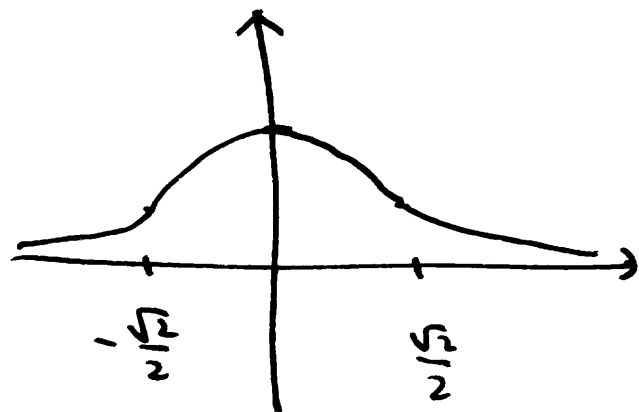
	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$t \rightarrow \pm \infty \quad y \rightarrow 0$$

$$-t^2 \rightarrow -\infty$$

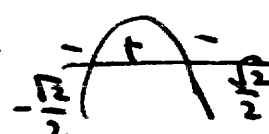
∴

$$e^{-t^2} \rightarrow 0$$



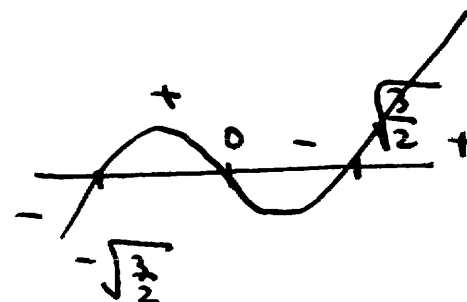
III $y = t e^{-t^2}$ の増減表.

$$\begin{aligned} y' &= (t)' e^{-t^2} + t(e^{-t^2})' \\ &= e^{-t^2} + t(-2t) e^{-t^2} \\ &= (1-2t^2) e^{-t^2} \end{aligned}$$



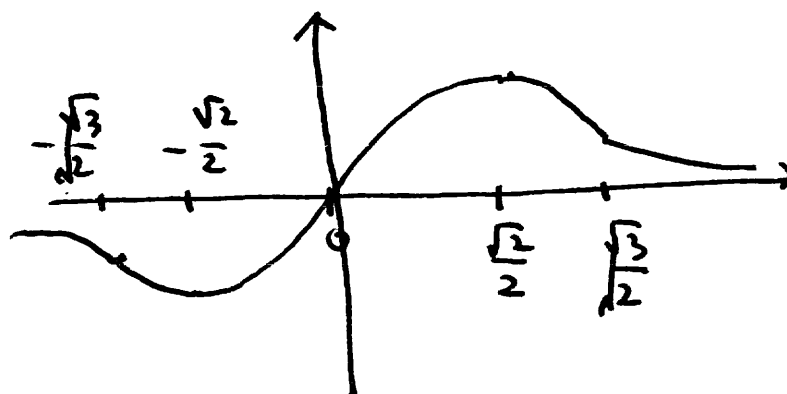
$$\begin{aligned} y'' &= (1-2t^2)' e^{-t^2} + (1-2t^2)(-2t) e^{-t^2} \\ &= -4t \cdot e^{-t^2} + (1-2t^2)(-2t) e^{-t^2} \\ &= -2t \{ 2 + (1-2t^2) \} e^{-t^2} \\ &= -2t (3-2t^2) e^{-t^2} \\ &= 2t (2t^2-3) \end{aligned}$$

0.5 増減表は下図.



$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
-	+	+	-	-
-	+	+	-	+
↙	↘	↗	↘	↙

$\frac{\sqrt{6}}{2} e^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2} e^{-\frac{3}{2}}$



IV $f(t) = \log(1+t)$ 2-й раз Taylor разложить
в ряд. $(a=0, n=2)$

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

о.з

$$\log(1+t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2$$

$$+ \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3$$

$$= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{(1+0)^3}t^3$$

2-й раз Taylor разложить в ряд в окрестности $t=0$.

V $e^t \geq 1+t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 \quad (t \geq 0)$

$g(t) = e^t$ 2-й раз, $g^{(4)}(t) = e^t$ 2-й раз. $g^{(4)}(0) = 1$

$$e^t = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \frac{1}{3!}g^{(3)}(0)t^3$$

$$+ \frac{1}{4!}g^{(4)}(0)t^4$$

$$= 1+t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}e^t t^4$$

$$\geq 1+t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$$

о.з 2-й раз. 2-й раз в окрестности $t=0$ и $t \geq 0$.