<< 漸化式 と 極限 >>

I $a_{n+1} = 4a_n - 2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$\alpha = 4\alpha - 2$ となる実数 α は $\alpha = \frac{2}{3}$ である.

$$\begin{array}{l} a_{n+1} = 4a_n - 2 \\ -)\ \alpha = 4\alpha - 2 \\ \hline a_{n+1} - \alpha = 4(a_n - \alpha) \end{array}$$

よって 数列 $\left\{ a_n - \frac{2}{3} \right\}$ は 公比 4 の等比数列 である.

$$a_n - \frac{2}{3} = 4^n \left(a_0 - \frac{2}{3} \right)$$

より

$$a_n = \frac{2}{3} + 4^n \left(a_0 - \frac{2}{3} \right)$$

II $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{3} \right)^k = ?$

$$S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$-)\ \frac{1}{3} S_n = \qquad 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n - n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} - n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)}{\frac{2}{3}} - n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

よって

$$S_n = \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)}{4} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Ⅲ $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ を解く.

特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ で、これを解くと

$$\lambda = 3, -2$$

である. これを用いると 漸化式を

$$a_{n+2} - (3 + (-2))a_{n+1} + (-2)\cdot 3\, a_n = 0$$

と変形して

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = (-2)(a_{n+1} - 3a_n) \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \end{cases}$$

を得る. これから $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は 公比 (-2) の 等比数列 であり、$\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は 公比 3 の 等比数列 である. よって

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^n (a_1 - 3a_0)$$

$$-) \quad a_{n+1} + 2a_n = 3^n (a_1 + 2a_0)$$

$$-5a_n = (-2)^n (a_1 - 3a_0) - 3^n (a_1 + 2a_0)$$

より

$$a_n = \frac{1}{5}\cdot 3^n (a_1 + 2a_0) - \frac{1}{5}(-2)^n (a_1 - 3a_0)$$

を得る.

IV　$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

特性方程式は

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

から　$\lambda = 3$（重解）が解である．

$$a_{n+2} - (3+3)a_{n+1} + 3\cdot 3\, a_n = 0$$

であるので

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

と変形すると

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^n(a_1 - 3a_0)$$

を得る．この両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = 3^{-1}(a_1 - 3a_0)$$

から $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は公差 $3^{-1}(a_1-3a_0)$ の等差数列

である．このことから

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_0}{1} + n\cdot 3^{-1}(a_1 - 3a_0)$$

から

$$a_n = 3^n a_0 + n3^{n-1}(a_1 - 3a_0)$$

を得る．

V $(a+b)^{10}$ における a^4b^6 の係数

$${}_{10}C_4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$$