6月8日 レジュメ

Ⅰ

定理 $a_n \geqq 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

を満たす数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

と収束するならば

$$\alpha \geqq 0$$

系

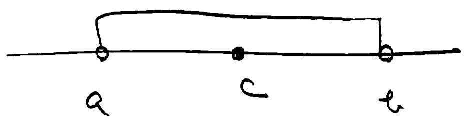
$a_n \leqq b_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$

を満たす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して

$$a_n \longrightarrow \alpha, \quad b_n \longrightarrow \beta$$

が成立するならば

$$\alpha \leqq \beta.$$



Ⅱ

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が各点で微分可能とする。f が $c \in (a, b)$ で極大・極小ならば

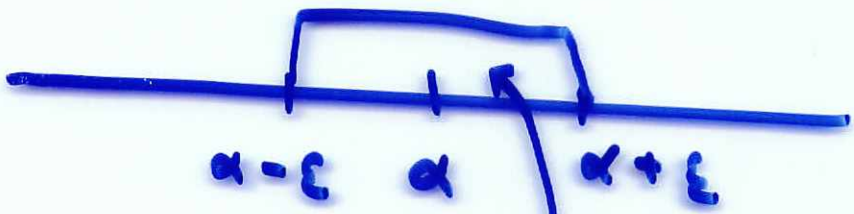
$$f'(c) = 0.$$

注 f が $c \in (a, b)$ で広義の極大 (resp. 極小) とは, $\delta > 0$ が存在して

$$f(x) \leqq f(c) \qquad (x \in (c-\delta, c+\delta))$$

$$\left(\text{resp.} \qquad f(x) \geqq f(c) \qquad (x \in (c-\delta, c+\delta))\right)$$

$a_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$　任意の $\varepsilon > 0$



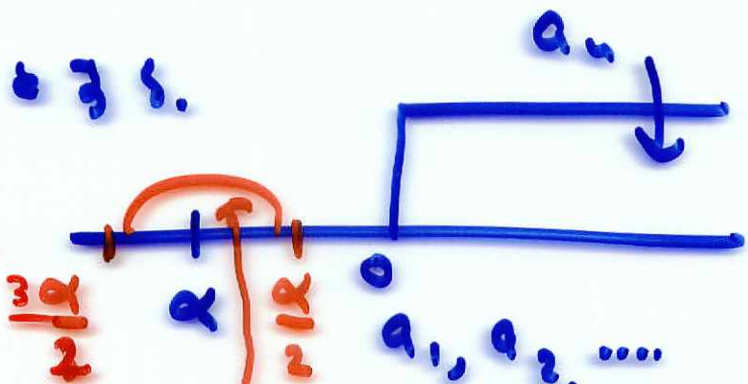
番号 N が存在して

ε に依る.

$a_N,\ a_{N+1},\ a_{N+2},\ \cdots$

定理の idea.

$\alpha < 0$ とする.



$\varepsilon := -\dfrac{\alpha}{2} > 0$

$\downarrow$

N が存在して　$a_N,\ a_{N+1},\ \cdots$

$\downarrow$

impossible

系：定理から すぐに 従うこと.

Corollary

$c_n = b_n - a_n \geqq 0$ $\Big\}$ $\longrightarrow \beta - \alpha \geqq 0$

$\hookrightarrow \beta - \alpha$

定理

---

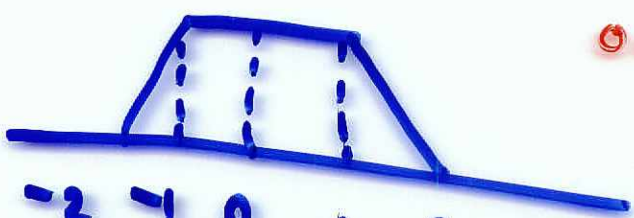
f が $x=c$ で 広義の極大
狭義 maximal

$\delta > 0$ が存在し

$f(x) \leqq f(c)$
$<$

$\uparrow$

c の近く $(c-\delta < x < c+\delta)$
$x \neq c$



0 は広義の極大
狭義の極大でない…

(証明) $f(c)$ 極大値とする

$0 \geqq \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \longrightarrow f'(c)$

• $x \to c+0$ 右極限. $(x > c$ の下で $x \to c$ とする$)$

$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $\leqq 0$
$0 < x-c$

$\leqq 0 \rightsquigarrow f'(c) \leqq 0$

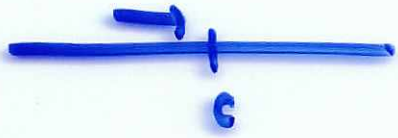
・ $x \to c-0$ （$x < c$ の下で $x \to c$）

を考えると

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0$$

$\leqq 0$

$0 >$



$\rightsquigarrow \quad f'(c) \geqq 0$

$\rightsquigarrow \quad f'(c) = 0$

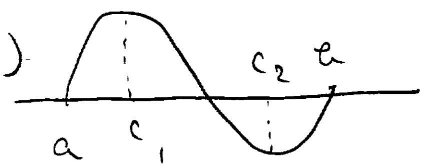
Ⅲ Rolleの定理

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

は $[a, b]$ 上連続，(a, b) で微分可能とする．
さらに

$$f(a) = f(b)$$

を仮定する．このときある $c \in (a, b)$ に対して



$$f'(c) = 0$$

が成立する．

<u>系</u> 平均値の定理．

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

は $[a, b]$ 上連続，(a, b) 上微分可能とする．

このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する

<u>系の系</u> $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 微分可能

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) > 0 \ (< 0) \\ t \in (a, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ は狭義単調増加（減少）}$$

$\geqq 0$ （広義）

$(\leqq 0)$

証明

$f(c)$ 極大（定義）

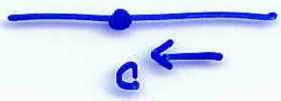
$x \to c$　両側極限

$$0 \geqq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \longrightarrow f'(c)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \leqq f(c) \\ (c-\delta < x < c+\delta) \end{array}}$$

- $x \to c+0$　（$x > c$ の下で $x \to c$）

右極限



$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0$$

$f(x)-f(c) \leqq 0$, $x-c > 0$

$\rightsquigarrow f'(c) \leqq 0$

左極限

- $x \to c-0$

（$x < c$ の下で $x \to c$）

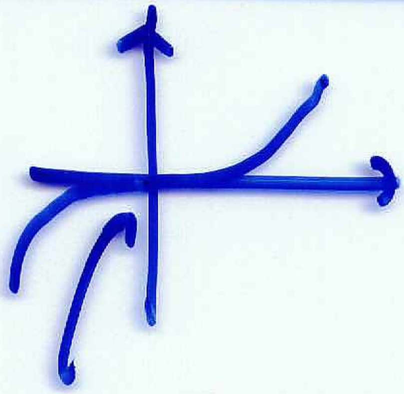
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0 \rightsquigarrow f'(c) \geqq 0$$

$f(x)-f(c) \leqq 0$, $0 > x-c$

$f'(c) \geqq 0$ かつ $\leqq 0 \longrightarrow f'(c)=0$

注) 極大 OR 極小 etc $\Rightarrow f'(c)=0$

逆は成立しない



$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$

0では極大でも極小でも無い

$f''(c)>0,\ f'(c)=0 \Rightarrow$ 極小

(<0) (大)

再来週示す.

注) 右極限 (左)

$\left(\begin{array}{c} x_n \to c \text{ ならば} \\ f(x_n)\to A \end{array}\right)$

$f(x)\to A \quad (x\to c)$

$\Rightarrow \quad f(x)\to A \quad (x\to c+0)$

$f(x)\to A \quad (x\to c-0)$

$\left(\begin{array}{c} x_n \to c,\ x_n>c \text{ ならば} \\ f(x_n)\to A \end{array}\right)$

定理

$f(x) \to A \quad (x \to c+0)$

$f(x) \to A \quad (x \to c-0)$

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} f(x)$ が存在し

$= A.$

(証明しない)

Rolleの定理の証明.

場合分け.

① $f(x) \equiv f(a) = f(b)$

$f'(x) = 0$

$x \in (a, b)$

$\rightsquigarrow$ ok.

②

最大値の定理.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 連続

最大値 M, 最小値 m がある.

$M = f(c_1)$, $m = f(c_2)$

をみたす c_1, c_2 がある.

(i) $M = f(a) = f(b)$ かつ $m = f(a) = f(b)$ $\Big\}$ → $f(x) = f(a)$

↓

I で OK.

(ii) not (i)

c_1

$f(c_1) = M > f(a) = f(b)$ ⇝ $a < c_1 < b$

↓

f は c_1 で 極大

↓

$f'(c_1) = 0$

OR

$f(c_2) = m < f(a) = f(b)$

↓

$a < c_2 < b$ c_2

↓

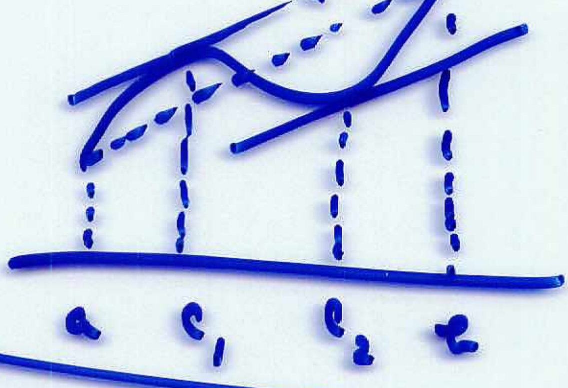
f は c_2 で 極小. → $f'(c_2) = 0$

CT 107 page

平均値の定理

傾きは $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

↓



CT 108 p

証明 g に対して Rolle を使う.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

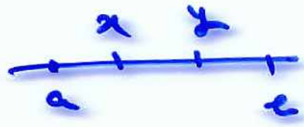
$g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a)$

CT を読む!

$f'(x) \underset{\geqq}{>} 0 \quad (x \in (a,b))$

$\Longrightarrow$ fは$\underset{広}{狭}$義の単調増加.

$a < x < y < b \Longrightarrow f(x) \underset{\leqq}{<} f(y)$



(証明)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \underset{\geqq}{>} 0$$

$0 < y-x$

をみたす c が $x < c < y$ に存在

$\longrightarrow \quad f(y) - f(x) \overset{\geqq}{>} 0$

$f(y) \underset{\geqq}{>} f(x)$

次回は 凹凸 + Taylorの定理

+ 偏微分

$$y' = \log t + 1 \gtreqless 0 \iff t \gtreqless \cancel{0}\ e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$t \log t$

t	(0)		$\frac{1}{e}$	
y'		$-$	0	$+$
y	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

・$t \to +\infty$ のとき $\boxed{\log t \to +\infty}$

$t \log t \to +\infty$.

・$t \to +0$ のとき. $(\log t \to -\infty)$

$t \log t$

$0 \cdot (-\infty) = ?$

不定形

$= e^{-s} \cdot (-s)$

$\log t = -s$ とおく.

$= -\dfrac{s}{e^{s}}$

$t = e^{-s}$

$\to (-1) 0 = 0$

$s = -\log t$

$\to +\infty$

6月1[redacted] II

$y = xe^{-x}$.

$$\frac{d(e^u)'}{du} = e^u$$

$y' = (x)' e^{-x} + x \cdot (e^{-x})'$ $\quad u = -x$

$= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1)$ $= \frac{du}{dx}$

$= e^{-x}(1-x)$

$0 < e^{-x}$

$y = 1 - x$

+ −

1

x		1	
y'	+	0	−
y	↗	$1/e$	↘

$x^4 \to +\infty,\ e^x \to +\infty$ $\quad \frac{x^4}{e^x} \to \frac{+\infty}{+\infty}$ 不定形

$$\boxed{\frac{x^4}{e^x} \to 0 \quad (x \to +\infty)}$$

[illegible].

・ $y = \frac{x}{e^x} \to 0 \quad (x \to +\infty)$

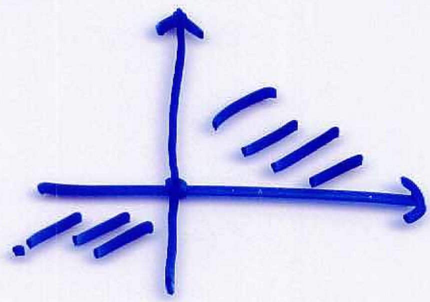
・ $x \to -\infty$

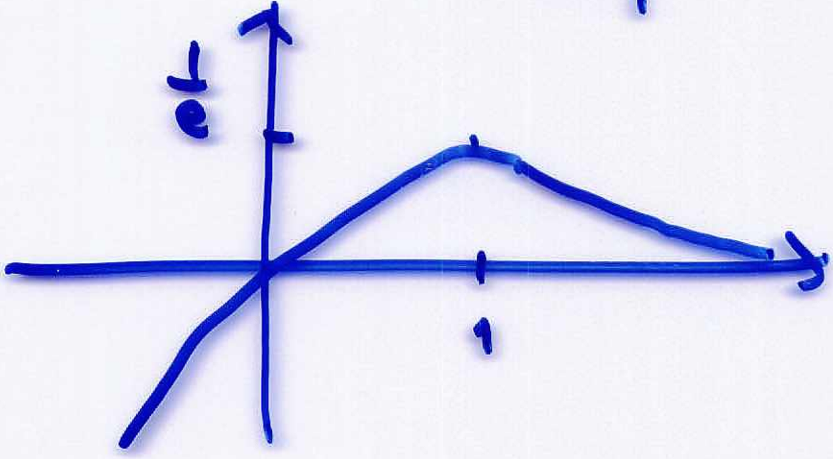
$e^{-x} \to +\infty,\ x \to -\infty$

$-x \to +\infty$

$x \cdot e^{-x} \to -\infty$

$y = x \underbrace{e^{-x}}_{>0}$ $\quad y \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

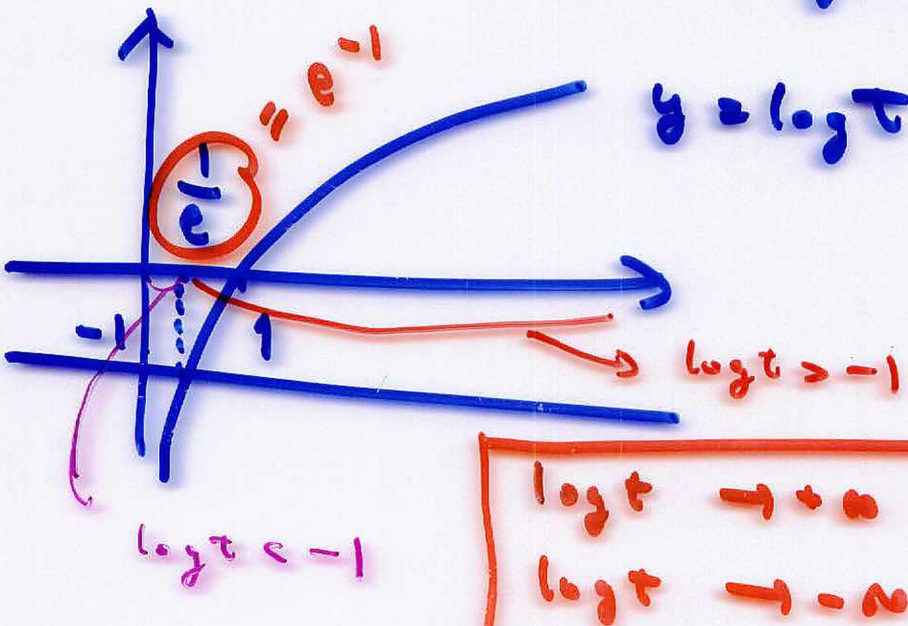




6A6A exo

IV $\quad y = t \log t \quad (t > 0)$

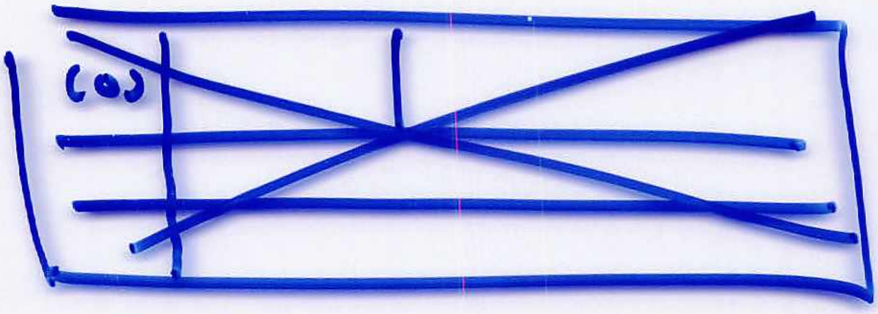
$$y' = (t)' \log t + t \cdot (\log t)'$$
$$= \log t + t \cdot \frac{1}{t} = \log t + 1$$

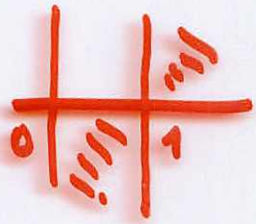


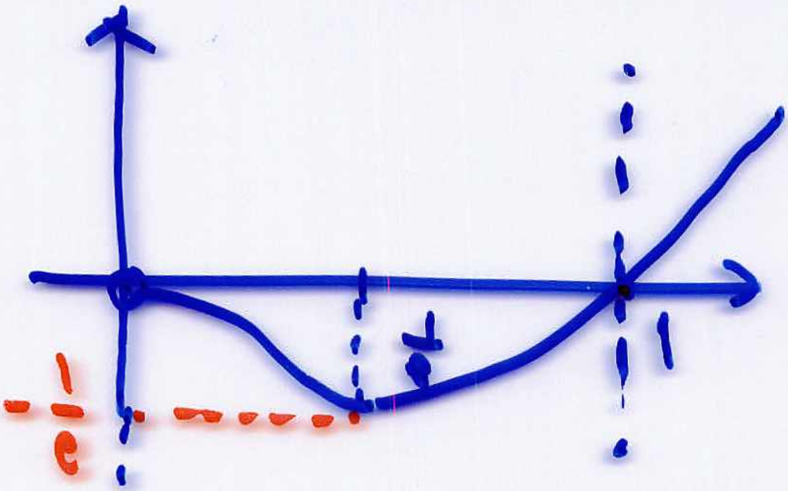
$\log t \to +\infty \quad (t \to +\infty)$
$\log t \to -\infty \quad (t \to +0)$

$$y = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{t}\log t \gtreqless 0 \iff \log t \gtreqless 0$$

$$\iff t \gtreqless 1$$







I $\quad y = \dfrac{\log t}{t}$ の増減表.

$(t > 0)$

II $\quad y = t^{\frac{1}{3}}(t-1) \quad (t > 0)$

の増減表.