4/13の解答

I 差分方程式
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2 \end{cases}$$
を解け.

$$\alpha = 3\alpha - 2$$
を解くと $\alpha = 1$ である.
$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} &=& 3a_n - 2 \\ -) & \alpha &=& 3\alpha - 2 \\ \hline & a_{n+1} - \alpha &=& 3(a_n - \alpha) \end{array}$$
から $\{a_n - 1\}$ は公比 3 の等比数列である. これから
$$a_n - 1 = 3^n (a_0 - 1) = 0$$
が従うので
$$a_n = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
が求める解である.

II $S_N = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ を求めよ.

$$\begin{array}{rrl} & S_N = & 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \\ -) & \frac{1}{2}S_N = & \quad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} + N\left(\frac{1}{2}\right)^N \\ \hline & \frac{1}{2}S_N = & 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} - N\left(\frac{1}{2}\right)^N \end{array}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} - N\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} - N\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
から
$$S_N = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} - N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

Ⅲ $\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 & \cdots (\#) \\ a_0 = A,\ a_1 = B \end{cases}$

を解け

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を解くと

$$\lambda = 3, -1$$

である。このことから (#) は

$$a_{n+2} - (3-1)a_{n+1} + 3\cdot(-1)a_n = 0$$

と見ることができる。これを2通りに変形すると

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} = (-1)(a_{n+1} - 3a_n) \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) \end{cases}$$

が分かる。これから

$$\begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (-1)^n (a_1 - 3a_0) & \cdots ① \\ a_{n+1} + a_n = 3^n (a_1 + a_0) & \cdots ② \end{cases}$$

が従う。① − ② から

$$-4a_n = (-1)^n (a_1 - 3a_0) - 3^n (a_1 + a_0)$$

を得るので

$$a_n = \frac{3^n}{4}(B + A) - \frac{(-1)^n}{4}(3B - A)$$

となる。