問題

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_4)$$

列ベクトル表示.

$$\mathrm{Im}(A) = \{ A\vec{x} \ ; \ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \} \subset \mathbb{R}^3$$

$$= \{ x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_4 \vec{a}_4 \ ; \ x_1, \cdots, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$2r \mathrel{+}= 1r \times (-1)$

$3r \mathrel{+}= 1r \times (-3)$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 4 & -5 & 1 \\ -) \ 1 & 2 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 2 & -4 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 7 & -5 & 8 \\ -) \ 3 & 6 & -3 & 9 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

階段行列

$2r \times = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3r \mathrel{+}= 2r \times (-1)$

階数 2

(rank

le rang)

$\mathrm{rank}(A) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -) \ 0 & 2 & -4 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

- 行基本変形 $\longleftrightarrow$ 基本行列を左からかける

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

1行と3行の交換

- 「基本行列は正則」 P^{-1} あり.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i \neq j$　i行とj行の交換
- $\lambda \neq 0$　i行をλ倍

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda\gamma \end{pmatrix}$$

3行をλ倍.

- $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

3行のλ倍を1行にたす.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \to \cdots \to B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_4)$

行基本変形 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

標準単位ベクトル

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$$

$$\vec{b}_4 = 5\vec{b}_1 - \vec{b}_2$$

$$\to \begin{cases} \vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 = 5\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \end{cases}$$

$\vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_1$ には非自明な1次関係あり

$0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 = \vec{0}$ 自明な1次関係.

Pourquoi ?

$P = P_l \cdots P_2 P_1$

$$\boxed{P_l \cdots P_2 P_1} A = B$$

Pは正則.

$$P(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4) = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_4)$$
$$= (P\vec{a}_1 \cdots P\vec{a}_4)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} P\vec{a}_j &= \vec{b}_j \\ \vec{a}_j &= P^{-1}\vec{b}_j \end{aligned}}$$

C, D : 正則

$\Rightarrow$ 1) CD : 正則

$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$

2) C^{-1} : 正則

$(C^{-1})^{-1} = C$

Par exemple,

$$\boxed{\vec{b}_3 = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2}$$

両辺に P^{-1} をかける.

$$\vec{a}_3 = P^{-1}\vec{b}_3 = P^{-1}(3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2) = 3\underbrace{P^{-1}\vec{b}_1}_{=\vec{a}_1} - 2\underbrace{P^{-1}\vec{b}_2}_{=\vec{a}_2}$$

$$\longrightarrow \vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$$

$$\mathrm{Im}(A) \ni x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2, \quad \vec{a}_4 = 5\vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

$$= (x_1 + 3x_3 + 5x_4)\vec{a}_1 + (x_2 - 2x_3 - x_4)\vec{a}_2$$

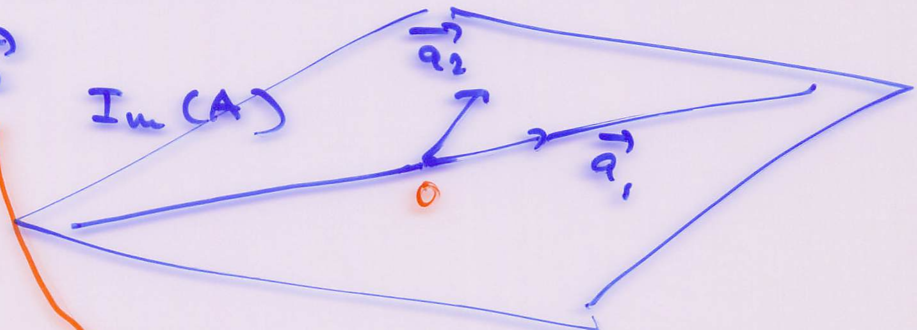
$\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ で張られる.

(span ~~b~~ / generate)

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = c_2 = 0$$



$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ は1次独立

$c_1 \neq 0$ とすると $\vec{a}_1 = -\dfrac{c_2}{c_1}\vec{a}_2$

$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ には非自明な1次関係がない

$$\boxed{P\vec{a}_j = \vec{e}_j}$$

P をかける

$$P(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2) = P\vec{0} = \vec{0}$$

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow c_1 = c_2 = 0$$

(I) $\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ではられる.

(II) $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ は1次独立

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im}(A)$ の基底として $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ がとれる

↑ 2次元

2次元

行列式について

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$1 \longrightarrow 2$
正の向

$2 \rightarrow 1$

大事なこと

① $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

② • $|\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{c}| = |\vec{a} \quad \vec{c}| + |\vec{b} \quad \vec{c}|$

$$= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1+b_1)c_2 - (a_2+b_2)c_1$$

$$= (a_1c_2 - a_2c_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= |\vec{a} \quad \vec{c}| + |\vec{b} \quad \vec{c}|$$

• $|\vec{a} \quad \vec{b}+\vec{c}| = |\vec{a} \quad \vec{b}| + |\vec{a} \quad \vec{c}|$

• $|\lambda\vec{a} \quad \vec{b}| = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &|\lambda\vec{a} \quad \vec{b}| \\ &= \lambda|\vec{a} \quad \vec{b}| \end{aligned}}$$

$$= \lambda a_1 b_2 - \lambda a_2 b_1$$

$$= \lambda(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \lambda|\vec{a} \quad \vec{b}|$$

• $|\vec{a} \quad \lambda\vec{b}| = \lambda|\vec{a} \quad \vec{b}|$

列に関する線型性

③ $|\vec{a}\ \vec{a}| = 0$ 交代性

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$$

---

④ ← (② + ③) 交代性.

$$|\vec{a}\ \vec{b}| = -|\vec{b}\ \vec{a}|$$

by ③

$$|\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{a}+\vec{b}| = 0$$

$$= |\vec{a}\ \ \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{b}\ \ \vec{a}+\vec{b}|$$

$$0 = \underbrace{\boxed{|\vec{a}\ \vec{a}|}}_{=0} + |\vec{a}\ \vec{b}| + |\vec{b}\ \vec{a}| + \underbrace{\boxed{|\vec{b}\ \vec{b}|}}_{=0}$$

$$\rightsquigarrow\ |\vec{a}\ \vec{b}| = -|\vec{b}\ \vec{a}|$$

---

⑤

$$\left|{}^t\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$|{}^tA| = |A|$$

⑤ A : 2次正方行列

$$|{}^tA| = |A|$$

$$\left|{}^t\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 - b_1 a_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} {}^t\begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \end{pmatrix} \\ 1列 \quad 3列 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad 1行 \\ 3行 \end{array}$$

$\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$

$${}^t\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{a}} \\ \boxed{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{{}^t\mathbf{a}} & \boxed{{}^t\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

---

⑤

② ⇝ ②'

③ ⇝ ③'

④ ⇝ ④'

列 　　 行

(5) $\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow$

(2)'

$$\begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{a}_1} \\ \boxed{\mathbf{b}} \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}$$

$\boxed{a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2}$ $\mathbf{a}_1$ $\quad \mathbf{b}$

$\mathbf{c} \qquad \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

$\boxed{\lambda b_1 \quad \lambda b_2}$

$$= \left| {}^t\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \right| = \left| \boxed{{}^t\mathbf{a}_1 + {}^t\mathbf{b}} \quad \boxed{{}^t\mathbf{c}} \right|$$

$$= \left| {}^t\mathbf{a}_1 \quad {}^t\mathbf{c} \right| + \left| {}^t\mathbf{b} \quad {}^t\mathbf{c} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

③'

⑤ $\left| \begin{matrix} a_1 \\ a_1 \end{matrix} \right| = 0$

$= \left| \begin{matrix} {}^t a_1 & {}^t a_1 \end{matrix} \right| = 0$

④'

$$\left| \begin{matrix} a_1 \\ b \end{matrix} \right| = - \left| \begin{matrix} b \\ a_1 \end{matrix} \right|$$

A, B : 2次正方行列 $\rightsquigarrow$ AB : 2次正方行列

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$ 来週示す.

$\rightsquigarrow$ à la semaine prochaine.

3次の行列式.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \end{vmatrix} = \underset{(-1)^2}{\overset{(1,1)}{a_1}} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{(-1)^3}{\overset{(2,1)}{-\,a_2}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

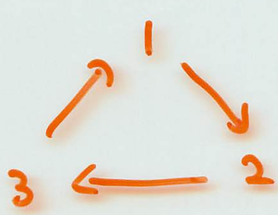
$$\underset{(-1)^4}{+}\ \overset{}{\underset{(3,1)}{a_3}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$=$ ↑ 1列の余因子展開.

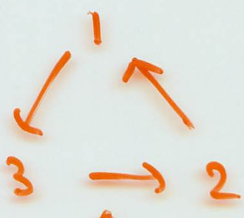
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$3! = 6$ 項.　1, 2, 3 の並べ方.



正



負.

$(-1)^{2+1}$ (2, 1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(1, 1)
$(-1)^{1+1}$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

1列に関する余因子展開

(3, 1)

$(-1)^{3+1}$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

3!個の項数

正

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

負

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 3 \arrow[rr] & & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$+$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

サラスの公式

---

(1)

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \delta & \beta & 0 \\ \varphi & \varepsilon & \gamma \end{vmatrix}$$

ε

(2)

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

ゼロ

0

(3)

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & z & y \\ 0 & w & u \end{vmatrix}$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

(5)

$$\begin{vmatrix} x & 0 & a \\ y & 0 & b \\ z & 1 & c \end{vmatrix}$$

(6)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$