$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}}_{= \vec{x}} = \vec{0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + u\vec{a}_4 + v\vec{a}_5 = \vec{0}$$

拡大行列

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3r \mathrel{+}= 1r \times (-3)]{2r \mathrel{+}= 1r \times (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 15 & 10 & 5 \\ \hline 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \end{array}$$

(I) $i \neq j$ $i$行と$j$行の交換

(II) $i \neq j$ $i$行の$\lambda$倍を$j$行に$+$

(III) $\lambda \neq 0$ $i$行を$\lambda$倍.

行基本変形

$$\xrightarrow{3r \mathrel{+}= 2r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r \times = \left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow 1r \mathrel{+}= 2r \times (-1)$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & v \\ & & \| & \| & \| \\ & & \alpha & \beta & \gamma \end{array} \end{array}$$

pivot = 1

pivotの上 = 0

$$\begin{cases} x + \frac{5}{4}z + u + \frac{1}{2}v = 0 \\ y + \frac{7}{4}z + u + \frac{1}{2}v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\alpha - \beta - \frac{1}{2}\gamma \\ -\frac{7}{4}\alpha - \beta - \frac{1}{2}\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

---

$$\mathrm{Ker}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 ;\ A\vec{x} = \vec{0} \}$$

A の核
kernel
le noyau

$$\boxed{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(A) \quad A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(A)}$$

(証明) $A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) = \lambda \underbrace{A\vec{x}_1}_{\vec{0}} + \mu \underbrace{A\vec{x}_2}_{\vec{0}}$

$= \lambda \cdot \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$

$\rightsquigarrow \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(A)$

---

Ker(A) は $\mathbb{R}^5$ の部分空間.

---

任意の $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(A)$

$\vec{x} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3$

部分空間

1) Ker(A) は $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ で張される.
span
generate

1), 2) から.
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は
Ker(A) の
基底
base

---

2) $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0}$ linearly independent

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{0} \rightsquigarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

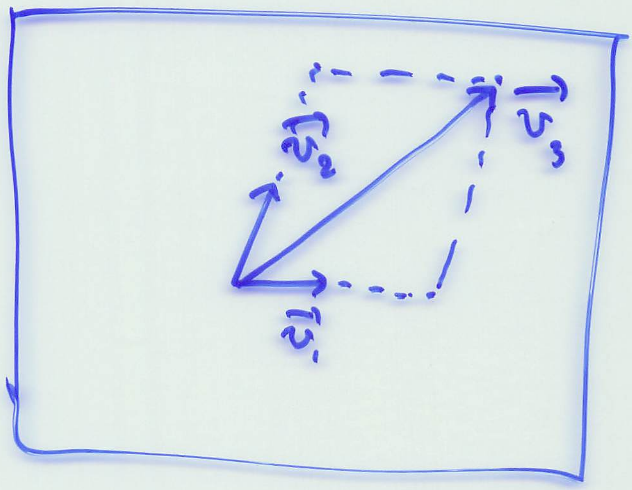
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は 1次独立, 線型独立

$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\beta \neq 0$ であったとする.

$$\vec{v}_2 = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{v}_1 - \frac{\gamma}{\beta}\vec{v}_3$$

線型従属




---

$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

線型独立.

---

$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{0}$ 　 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は線型従属.

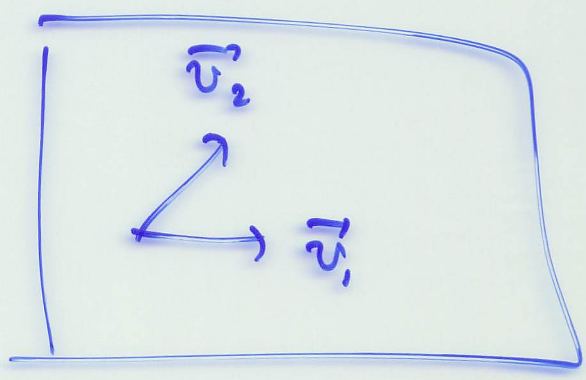
$\alpha \neq 0$ とする. $\vec{v}_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}_2$

$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$

---

$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

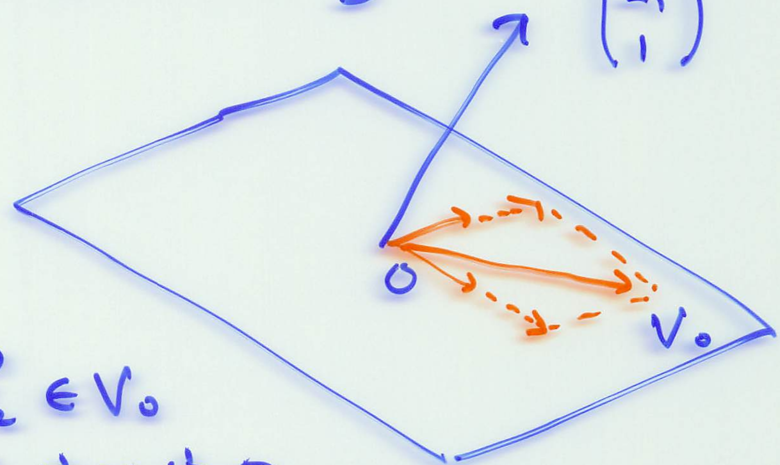
$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$



# <u>部分空間</u>　Ker(A)

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y + z = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_0$

$\Longrightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V_0$

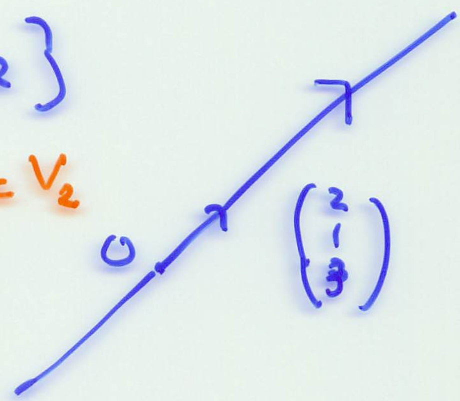
$V_0$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間.　　2次元

---

$$V_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda \overbrace{\boxed{s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}^{\in V_1} + \mu \boxed{s_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \in V_2$$

$$= (\lambda s_1 + \mu s_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in V_1$$




$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

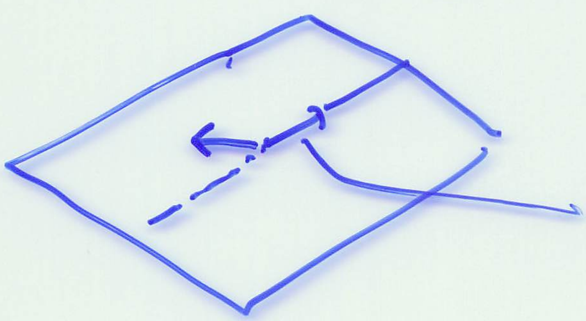
1次元.

$V_1$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$V_0$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる.

---

$$\vec{V}_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



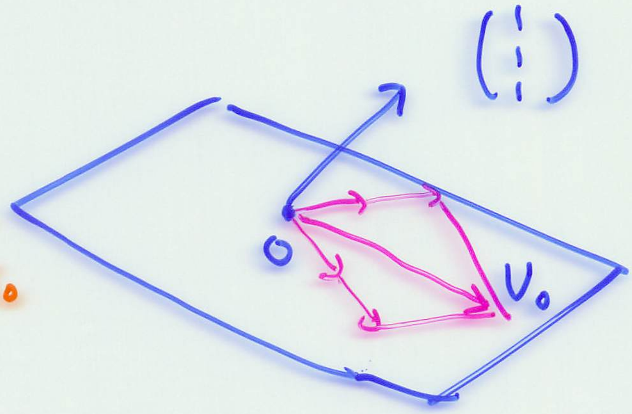
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例4　1)

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \ x+y+z=0 \right\}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_0$

$\Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V_0$




$\rightsquigarrow$ $V_0$は部分空間.　2次元

$$V_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} * \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} = \vec{0} \ \text{とする}$$

$\rightsquigarrow \alpha = \beta = 0$

---

1) $V_0$は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる.

2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は1次独立

$\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V_0$ の基底

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線形独立.

---

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V_0$ の基底 (base)

---

5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{a}_1$$

$$\mathrm{Im}(A) = \{ A\vec{x} \,;\, \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \} \subset \mathbb{R}^3$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_5 \vec{a}_5 \in \mathbb{R}^3$$

$$= \{ x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_5 \vec{a}_5 \,;\, x_j \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

---

$\boxed{\mathrm{Im}(A) \text{ は部分空間}}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ $\quad \vec{v}_1 = A\vec{x}_1, \ \vec{v}_2 = A\vec{x}_2$

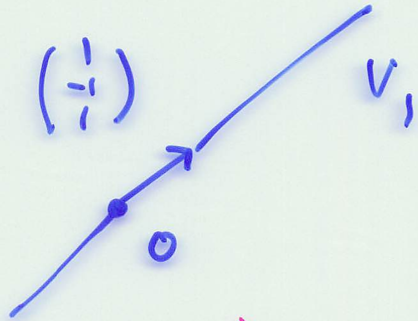
$$\rightsquigarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \lambda A \vec{x}_1 + \mu A \vec{x}_2$$

$$= A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \in \mathrm{Im}(A)$$

$$V_1 = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{v}_1 = s_1 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = s_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$




$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = (\lambda s_1 + \mu s_2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で $V_1$ は生成される

2) $\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$

---

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5)$$

$$\vec{a}_j \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \mathrm{Im}(A) = \{ \underbrace{x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_5 \vec{a}_5}_{\parallel \\ A\vec{x}} ; x_1, \cdots, x_5 \in \mathbb{R} \}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^5$

部分空間.

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{Im}(A)$$

$$\vec{v}_1 = A\vec{x}_1, \quad \vec{v}_2 \in A\vec{x}_2$$

$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \lambda A \vec{x}_1 + \mu A \vec{x}_2$$

$$= A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \in \mathrm{Im}(A)$$

## Im(A) は2次元

$$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5)$$

$$B = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_5)$$

$$P^{-1}\vec{e}_3 = P^{-1}\left(\frac{5}{4}\vec{e}_1 + \frac{7}{4}\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{5}{4}P^{-1}\vec{a}_1 + \frac{7}{4}P^{-1}\vec{a}_2$$

$$\vec{e}_3 = \frac{5}{4}\vec{e}_1 + \frac{7}{4}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{e}_5 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

$$= \frac{1}{4}\vec{a}_1 + \frac{7}{4}\vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 = \frac{5}{4}\vec{a}_1 + \frac{7}{4}\vec{a}_2$$

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{a}_5 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

以下 このジャンプは何故かを説明

1行と2行の交換 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I$ ~~T~~ から作る

$T_I$

1行のλ倍を2行に足す $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \\ z \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 0$

2行をλ倍 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

行基本変形 $\longleftrightarrow$ 基本行列をかける.

可逆.

(1行と2行の交換)$^{-1}$

$\shortparallel$

(1行と2行の交換)

$$\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} = I_3$$

(1行のλ倍を2行に+)$^{-1}$

$\shortparallel$

1行の$(-\lambda)$倍を2行に+

1行×$(-\lambda)$を2行に+

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -\lambda&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ \lambda&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ \lambda&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -\lambda&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} = I_3$$

$\lambda \neq 0$

(2行をλ倍)$^{-1}$

$\shortparallel$

2行を$\frac{1}{\lambda}$倍

$$\begin{pmatrix} 1&&\\ &\lambda&\\ &&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&&\\ &\frac{1}{\lambda}&\\ &&1 \end{pmatrix} = I_3$$

---

基本行列は正則.

Xも基本行列.

$$PX = XP = I_3.$$

をみたす X あり. X: 逆行列.

---

A: 正則

$$AX = XA = I_n$$

をみたす X あり.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

A, B: 正則 $\Longrightarrow$ ABも正則

1) 1行と2行の交換 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左から×

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

2) 1行のλ倍を2行に+

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \\ z \end{pmatrix}$$

3) 2行をλ倍 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \\ z \end{pmatrix}$$

---

**まとめ** 1) 行基本変形

$\longleftrightarrow$ 基本行列を左からかける.

2) 基本行列は正則.

逆行列は基本行列.

---

$A$ : $n$次正方行列.

定義

$A$ : 正則 $\Longleftrightarrow$ $AX = XA = I_n$ をみたす $X$ あり.

$A, B$ : 正則

$\hookrightarrow$ $(AB)$ も正則

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

---

$$B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} I_n B = B^{-1}B = I_n$$

$$A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = A A^{-1} = I_n$$

---

$$B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\underbrace{I_n B}_{=B} = B^{-1}B = I_n.$$

$$A(BB^{-1})A^{-1} = A\,I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

---

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5) \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\quad} B = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_5)$$

行基本変形

$$\boxed{\overbrace{P_\ell \cdots P_2 P_1}^{P}}\,A = B$$

$P_j$ : 基本行列 特に正則.

$$PA = B \rightsquigarrow P(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_5)$$

$$P(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5) = (P\vec{a}_1\ P\vec{a}_2 \cdots P\vec{a}_5)$$

$$P\vec{a}_j = \vec{e}_j \qquad \vec{a}_j = P^{-1}\vec{e}_j$$

---

$$\mathrm{Im}(A) \ni \vec{y} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_5\vec{a}_5$$

$$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\underbrace{\left(\frac{5}{4}\vec{a}_1 + \frac{7}{4}\vec{a}_2\right)}_{\vec{a}_3}$$

$$+ x_4\underbrace{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)}_{2\vec{a}_4} + x_5\overbrace{\left(\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2\right)}^{\vec{a}_5}$$

$$= \left(x_1 + \frac{5}{4}x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)\vec{a}_1$$

$$+ \left(x_2 + \frac{7}{4}x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)\vec{a}_2$$

前ページの補足.



$$\vec{e}_3 = \frac{5}{4}\vec{e}_1 + \frac{7}{4}\vec{e}_2$$

$$P^{-1}\vec{e}_3 = P^{-1}\left(\frac{5}{4}\vec{e}_1 + \frac{7}{4}\vec{e}_2\right)$$

$$= \frac{5}{4}P^{-1}\vec{e}_1 + \frac{7}{4}P^{-1}\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_3 = \frac{5}{4}\vec{a}_1 + \frac{7}{4}a_2$$

---

$$\vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$P^{-1}\vec{e}_4 = P^{-1}\vec{e}_1 + P^{-1}\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

---

$$\vec{e}_5 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

$$P^{-1}\vec{e}_5 = \frac{1}{2}P^{-1}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}P^{-1}\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_5 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha \vec{a_1} + \beta \vec{a_2} = \vec{0}$

$\longrightarrow P(\alpha \vec{a_1} + \beta \vec{a_2}) = \vec{0}$

$P.$

$\alpha P\vec{a_1} + \beta P\vec{a_2}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \alpha = \beta = 0$

$\vec{a_1}, \vec{a_2}$は1次独立

Im(A)の基底として $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ がとれる

Im(A)の基底として $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ がとれる

問題

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ の Im(A) の基底を求めよ。

Ker(A)の基底を求めよ.

$x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2} + x_3 \vec{a_3} + x_4 \vec{a_4}$