

11/17 講義 1.5 2.1 解答.

$$I \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$$V := \{s\vec{a} + t\vec{e}; s, t \in \mathbb{R}\}$$

1. 対して $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の V への正射影を求めよ.

正射影 $\vec{w}$ を

$$\vec{w} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{e} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と表示する. (但し $A = (\vec{a} \ \vec{e})$)

とすると

$$(\vec{e} - \vec{w}) \perp V$$

が成り立つ

$$((\vec{e} - \vec{w}), A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}) = (t A \vec{e} - t A A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}) = 0$$

が全ての $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ に対して成立するから

$$t A A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = t A \vec{e}$$

と両辺を t で割る.

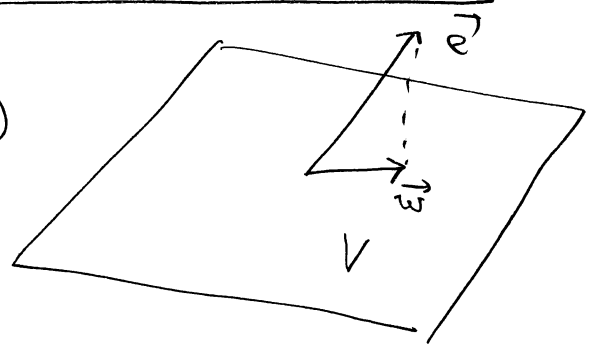
$$t A A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$t A \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

を得る.



$$\text{II} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Σ 行 $\neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r+ = 1r \times (-5) \\ 3r+ = 1r \times (-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow 3r+ = 2r \times (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{2r \times (-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow 1r+ = 2r \times (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

かじ $\frac{5}{4} z + u + \frac{1}{2} v = 0$

$$\begin{cases} x + \frac{5}{4} z + u + \frac{1}{2} v = 0 \\ y + \frac{7}{4} z + u + \frac{1}{2} v = 0 \end{cases}$$

と 同 じ 値 $z = \alpha, u = \beta, v = \gamma$ と 仮 定

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}\alpha - \beta - \frac{1}{2}\gamma \\ -\frac{7}{4}\alpha - \beta - \frac{1}{2}\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

次に与えられた方程式の解全体を表す。

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とある。

$$\text{Ker}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5; A\vec{x} = \vec{0} \}$$

とあると $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \text{Ker}(A)$ ならば

$$A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) = \lambda A\vec{x}_1 + \mu A\vec{x}_2 = \vec{0}$$

より

$$\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 \in \text{Ker}(A)$$

つまり成り立つ。 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間

$\text{Ker}(A)$ は $\mathbb{R}^5$ の部分空間

と呼ぶ。

1) $\vec{x} \in \text{Ker}(A)$ とあると

$$\vec{x} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3$$

と書ける。 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間

$\text{Ker}(A)$ は $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ で張られる。

と呼ぶ。

$$2) \quad \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0}$$

とあると

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より $\alpha = \beta = \gamma = 0$ となる。 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は基底型と成り立つ。

と呼ぶ。

3) 1) 2) をもとに

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は $\ker(A)$ の基底である。

としよう

① 一般に $\mathbb{R}^n$ の部分集合 V が

$$\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in V$$

を満たすならば V は $\mathbb{R}^n$ の部分空間と呼ばれる。

② A は $m \times n$ 行列とすると

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n$$

が定まる。

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; A\vec{x} = \vec{0} \}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

$$I_m(A) = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m; \vec{y} = A\vec{x} \text{ となる } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

実際、 $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in I_m(A)$ とすると

$$\vec{y}_1 = A\vec{x}_1, \vec{y}_2 = A\vec{x}_2$$

を満たす $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

$$\begin{aligned} \lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 &= \lambda A\vec{x}_1 + \mu A\vec{x}_2 \\ &= A(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \end{aligned}$$

が

$$\lambda \vec{y}_1 + \mu \vec{y}_2 \in I_m(A)$$

が成り立つ。

$$\text{II } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5)$$

に於て $\vec{y} \in \text{Im}(A)$ は

$$\vec{y} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 + x_4 \vec{a}_4 + x_5 \vec{a}_5$$

と $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5$ の線形結合で表される。実は $\text{Im}(A)$ は $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ の線形結合で表される。II の解法の手続きから分かる。

$$A \rightarrow \dots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_5)$$

に於て $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_5$ が基底として存在し、 $P_1, \dots, P_5$ が存在して

$$P_1 \dots P_5 A = B$$

から正則行列 P が存在して

$$P A = B$$

より

$$P \vec{a}_j = \vec{e}_j \quad (j=1, \dots, 5)$$

が成り立つ。

$$\begin{cases} \vec{e}_3 = \frac{5}{4} \vec{e}_1 + \frac{7}{4} \vec{e}_2 \\ \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_5 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 \end{cases}$$

から逆に P^{-1} を求めると

$$\begin{cases} \vec{a}_3 = \frac{5}{4} \vec{a}_1 + \frac{7}{4} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_5 = \frac{1}{2} \vec{a}_1 + \frac{1}{2} \vec{a}_2 \end{cases}$$

∴ $\vec{y} =$ とおくと

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^5 x_i \vec{a}_i$$

$$= \left(x_1 + \frac{5}{4} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} x_5 \right) \vec{a}_1$$

$$+ \left(x_2 + \frac{7}{4} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} x_5 \right) \vec{a}_2$$

と $\text{Im}(A)$ の基底は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ とおける。従って

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$$

とすると (両辺) に P をかけると

$$c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = 0$ となる。よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は 線形独立 である。

よって $\text{Im}(A)$ の基底は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ である。

基底は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ である。