

11/10 小テスト 角分 終

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{よって } V = \{ s\vec{a} + t\vec{e}; s, t \in \mathbb{R} \}$$

を定める. V の正規直交基底を 1 つ求めよ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の

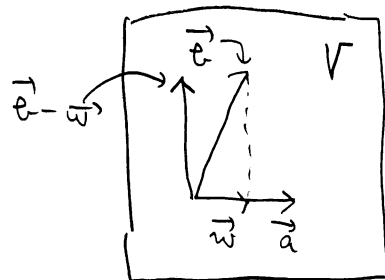
V の正射影を 3 つ計算せよ.

V の正規直交基底を 3 つ求める $\vec{e}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2" である. $\vec{a}$ に垂直な $\vec{e} - \vec{w}$ は

$$\begin{aligned} \vec{e} - \vec{w} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



3" である. $\vec{a}$ に対して $\vec{e} - \vec{w}$ は単位ベクトルとして得られる

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4" V の正規直交基底である. $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を用いて $\vec{e}$ の V への正射影 $\vec{v}$ は

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\vec{p}_1, \vec{e}) \vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}) \vec{p}_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{16}{18} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2" を得る.

補足

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{e} \end{pmatrix} \text{ と定まる.}$$

$$\vec{e} \text{ の } V \text{ への正射影は } \vec{v} = A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s\vec{a} + t\vec{e}$$

とある.

$$(\vec{e} - \vec{v}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{e}) = 0 \quad \text{--- } \textcircled{\#}$$

任意の $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して成立する. $\alpha\vec{a} + \beta\vec{e}$ は V のベクトルだからである. $\textcircled{\#}$ より

$$0 = (\vec{e} - A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}) = ({}^t A \vec{e} - {}^t A A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$$

とあると

$${}^t A \vec{e} - {}^t A A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$$

i.e.

$${}^t A A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = {}^t A \vec{e}$$

から得る.

$$\begin{pmatrix} {}^t \vec{a} \\ {}^t \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} \|\vec{a}\|^2 & (\vec{a}, \vec{e}) \\ (\vec{a}, \vec{e}) & \|\vec{e}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

即ち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Σ 得る. したがって

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

とある.

