

線形代数

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ に対し } A^n \text{ を計算する.}$$

まず A の固有値を求めよう

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 36 = 0$$

より A の固有値は $\lambda = 1 \pm 6$ であり $\lambda = 7, -5$ である。それぞれ固有値に対応する固有ベクトルを求めよう。

$\lambda = 7$ のとき

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 2y$$

より 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$$\underline{\lambda = -5 \text{ のとき}} \quad \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

より 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$$\therefore \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (7\vec{p}_1 \ -5\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。 $\det(P) = 2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 \neq 0$ より P は可逆行列を持つ

$$A = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と対角化できる。これから

$$A^n = P \begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

を得る。

(Cayley-Hamilton の定理) C-H の定理が

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

Σ 得る。 二たか

$$\begin{cases} A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2) \\ A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2) \end{cases}$$

Σ 得る。 系統り 返る

$$\begin{cases} A^n(A - 7I_2) = (-5)^n(A - 7I_2) \quad \dots ① \\ A^n(A + 5I_2) = 7^n(A + 5I_2) \quad \dots ② \end{cases}$$

か、徒る。 ① - ② する

$$-12 A^n = (-5)^n(A - 7I_2) - 7^n(A + 5I_2)$$

Σ 12

$$A^n = -\frac{1}{12} \{ (-5)^n(A - 7I_2) - 7^n(A + 5I_2) \}$$

と 7 得る。

(注) $A^n \Sigma (\lambda^2 - 2A - 35) = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$ 2" 得る。

$$A^n = g(\lambda)(\lambda - 7)(\lambda + 5) + a\lambda + b$$

と 7" 2 a, b Σ 7 得る。 $\lambda = 7, -5 \Sigma$ 5 得る。

$$\begin{cases} 7^n = 7a + b \\ (-5)^n = -5a + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ 得る。 二たか } a &= \frac{1}{12} (7^n - (-5)^n), b = 7^n - \frac{7}{12} (7^n - (-5)^n) \\ &= \frac{1}{12} (5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n) \end{aligned}$$

Σ 得る。 二た Σ 7 得る。

$$A^n = aA + bI_2$$

か、7 得る。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & & 1 \end{pmatrix}$$

問題

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda I_2 - A| = 0$$

Σ 4 T=7 6 9 8 15 16 33 0?

B : 2 = 2 正負 3 7 4 1.

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ Σ 4 T=7 6 9 8 15 16 33 0}$$

非自明解.

$$\Leftrightarrow \det(B) = 0$$

B 1.1

||

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda I_2 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\lambda I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

固有方程式

$$|\lambda I_2 - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1)^2 - 36 = 0$$

$$= \lambda I_2 - A \quad \lambda = -5, 7$$

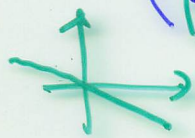
A 固有値

$$\lambda \neq -5 \Rightarrow \lambda \neq 7 \text{ あり}$$

自明解 0, 0, 0...

$$(\lambda I_2 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\lambda = -5$$



$$\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 12y = 0 \\ -3x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \xrightarrow{x = -2y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0) \quad \boxed{\text{I}} \text{ l'axe } x$$

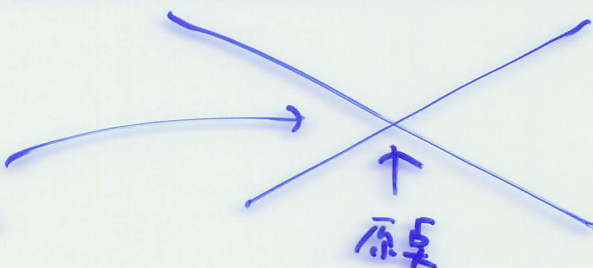
$$\lambda = 7$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0) \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

$$\lambda \neq -5, \lambda \neq 7 \text{ a.e.}$$

l'axe des ordonnées



$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ l'axe } x.$$

$$A\vec{p}_1 = -5\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = 7\vec{p}_2$$

$$\Rightarrow P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \text{ l'axe } x.$$

$$\begin{aligned} AP &= A(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (A\vec{p}_1, A\vec{p}_2) \\ &= (-5\vec{p}_1, 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

un peu difficile.

l'axe

l'axe des ordonnées

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_l) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_l \vec{a}_l$$

$$AP = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A.P.P^{-1} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}} A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_2} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$I_2 A = A I_2 = A$$

$$= P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} (-5)^2 & 0 \\ 0 & 7^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{-fin} \quad A^n = P \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Vous avez bien compris ?

Cayley - Hamilton 定理.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A + \det(A)I_2 = O_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad a=1, b=12, c=3, d=1$$

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

$$\rightarrow |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

$$|\lambda I_2 - A| = \lambda^2 - 2\lambda - 35$$

$$A^2 - 2A - 35I_2 = 0_2$$

$$\lambda = -5, 7$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda + 5)(\lambda - 7)$$

$$A^2 + 5A = 7A + 35I_2$$

$$\begin{cases} A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2) \\ A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2) \end{cases}$$

$$A^2(A + 5I_2) = 7^2(A + 5I_2)$$

$$\begin{cases} A^n(A + 5I_2) = 7^n(A + 5I_2) \\ A^n(A - 7I_2) = (-5)^n(A - 7I_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^{n+1} + 5A^n = 7^n(A + 5I_2) \\ A^{n+1} - 7A^n = (-5)^n(A - 7I_2) \end{cases}$$

$$12A^n = 7^n(A + 5I_2)$$

$$- (-5)^n(A - 7I_2)$$

$$\leadsto A^n = \frac{7^n}{12}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{12}(A - 7I_2)$$

quotient

$$\lambda^n = \underbrace{q(\lambda)}_{\text{quotient}} (\lambda - 7)(\lambda + 5) + \underbrace{a\lambda + b}_{\text{remainder}}$$

余りは $Aa + bI$

$$7^n = 7a + b$$

$$- (-5)^n = -5a + b$$

$$12b = 7^n - (-5)^n \leadsto a = \frac{7^n}{12} - \frac{(-5)^n}{12}$$

$$b = 7^n - 7a = \dots$$

$$f_1(A) \cdot f_2(A) = (A^3 + I_2)(A^2 - I_2)$$

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$= A^5 - A^3 I_2 + I_2 A^2 - I_2 I_2$$

$$= A^5 - A^3 + A^2 - I_2 = (f_1 \cdot f_2)(A)$$

$$(\lambda^3 + 1)(\lambda^2 - 1) = \lambda^5 - \lambda^3 + \lambda^2 - 1 = (f_1 \cdot f_2)(\lambda)$$

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_2$$

5.11 $f_1, f_2 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$

$$f_1(A) \cdot f_2(A) = (f_1 \cdot f_2)(A)$$

$\uparrow$
5.7.3.1.9 $f_1 \cdot f_2$

$\uparrow$
9.9.2.12.1.1 $f_1 \cdot f_2$

$$f_1(A) + f_2(A) = (f_1 + f_2)(A)$$

$\uparrow$
9.9.2.12.1.1 $f_1 + f_2$

$$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 35) + a\lambda + b$$

$$\begin{aligned} A^n &= g(A) \overset{0_2}{(A^2 - 2A - 35I_2)} + aA + bI_2 \\ &= g(A) 0_2 + aA + bI_2 \\ &= 0_2 + aA + bI_2 \\ &= aA + bI_2 \end{aligned}$$

$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 0 \quad \text{由 9.3 的式}$$

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta = 0$$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = 0$$

$$\begin{aligned} A(A - \alpha I_2) &= \beta A - \alpha\beta I_2 \\ &= \beta(A - \alpha I_2) \end{aligned}$$

$$A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\begin{cases} A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2) \\ A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \alpha I_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2) \\ A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow (\beta - \alpha) A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\beta \neq \alpha \text{ 且 } \beta \neq 0$$

$$A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha} (A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha} (A - \beta I_2)$$

ベクトルの内積

$n \geq 2$ 実ベクトル空間 V の基底.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

$$= (\vec{a}, \vec{b})$$

内積.

$$= {}^t \vec{a} \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

転置 (transpose)

transposition

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$$

$\vec{a}$ の長さ

$$\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a}, \vec{a})$$

性質 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

2) $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{c}) + \mu (\vec{b}, \vec{c})$

3) $(\vec{a}, \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}) + \mu (\vec{a}, \vec{c})$

4) $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

$$\nearrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$$

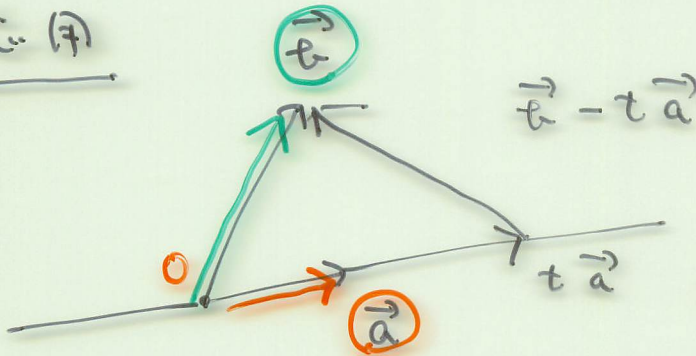
$\Downarrow$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

公式 $\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) \\ &= (\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) \\ &= (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

1. (7)



$\vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{a}\| > 0$

回答の形.

$\|\vec{b} - t\vec{a}\|$ を t の関数として考える

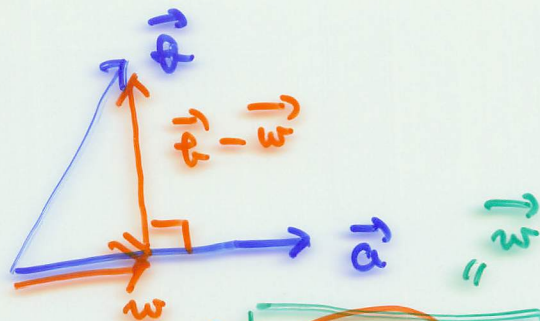
$$\begin{aligned} \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2 &= \|\vec{b}\|^2 - 2(\vec{b}, t\vec{a}) + \|t\vec{a}\|^2 \\ &= t^2 \|\vec{a}\|^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{b} - t\vec{a}\| &= |t| \|\vec{a}\| \\ &= \|\vec{a}\|^2 \left(t - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \right)^2 + \|\vec{b}\|^2 - \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2} \end{aligned}$$

$= 0 \quad a \in \mathbb{R} \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \dots$

$$t = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \quad a \in \mathbb{R} \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \dots$$

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

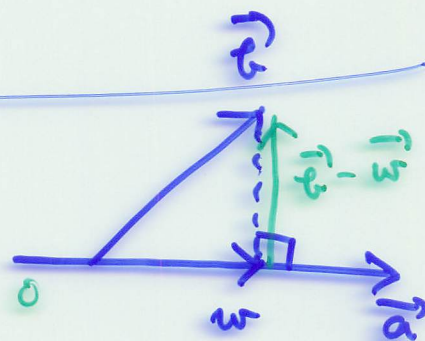


$$\begin{aligned} (\vec{e} - \vec{w}, \vec{a}) &= (\vec{e}, \vec{a}) - \left(\frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}, \vec{a} \right) \\ &= (\vec{e}, \vec{a}) - \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{a}, \vec{a}) \\ &= (\vec{a}, \vec{e}) - (\vec{a}, \vec{e}) = 0 \end{aligned}$$

$\|\vec{a}\|^2$

$$(\vec{e} - \vec{w}) \perp \vec{a} \quad \text{垂直に}$$

$$\begin{aligned} \vec{w} : \quad & \vec{e} - \vec{w} \perp \vec{a} \\ & \vec{w} = t \vec{a} \end{aligned}$$



$\vec{e}$ 及 $\vec{a}$ が 1 つの 直交基底
直交基底

orthogonal projection.

$$\begin{aligned} (\vec{e} - t\vec{a}, \vec{a}) &= (\vec{e}, \vec{a}) - t(\vec{a}, \vec{a}) \\ &= (\vec{a}, \vec{e}) - t\|\vec{a}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$t = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \quad \text{求める。}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{is the orthogonal projection}$$

find.