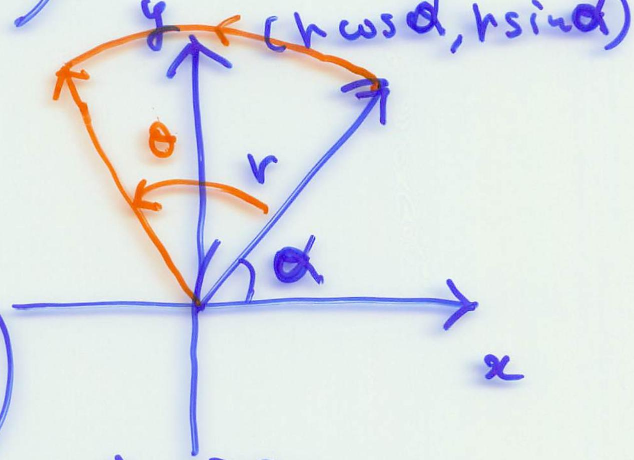
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

どんな行列か？



$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

極座標表示.

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

polar coordinates

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

rotation

回転の行列.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

↑ ゴリゴリと check

角 $\theta_1+\theta_2$ の回転.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

$$\det(A) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \searrow \text{逆行列あり.}$$

(復習)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

aと書

inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1 に相当

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BI_2 = I_2B = B$

B : 2次正方行列.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

角$(-\theta)$の回転

角度$(-\theta)$の回転

補足

※前回のプリント.

逆行列　　A : 2次正方行列 (n次でもよい)

$$AX = XA = I_2$$

をみたす 2次正方行列 X が存在するとき ⇝ A : 正則

regular

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BI_2 = I_2B = B$$

(B : 2次正方行列)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0 \Longrightarrow A : \text{正則}.$$

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

・逆行列は存在すれば唯1つ.

A: 正則とする.

$$\boxed{\left.\begin{aligned} AX = XA = I_2 \\ AY = YA = I_2 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow X = Y.}$$

(証明) $AX = I_2 \rightsquigarrow \underbrace{Y(AX)}_{\shortparallel} = Y \cdot I_2 = Y$

結合法則 $\underbrace{(YA)}_{I_2} X = I_2 X = X$

・いつ正則か?

定理 A: 2次正方

$A\vec{o} = \vec{o}$ $\vec{o}$ は $A\vec{v} = \vec{o}$ の自明解

$$\left(\begin{aligned} A\vec{v} = \vec{o} \text{ をみたす} \\ \vec{v} \neq \vec{o} \text{ が存在する} \end{aligned} \right) \iff \det(A) = 0$$

非自明解

$$(A\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}) \iff \det(A) \neq 0.$$

自明解しかない

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A: 正則とする

$A\vec{v} = \vec{o} \rightsquigarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_2}\vec{v} = A^{-1}\vec{o} = \vec{o}$

$= I_2\vec{v} = \vec{v}$ $\quad \vec{v} = \vec{o}$ 結論

$$(A\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}) \iff \det(A) \neq 0.$$

定理

2次に限らず成立する.

$$A: \text{正則} \iff \det(A) \neq 0$$

III

$$A = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}}_{=C} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= C - \lambda I_2.$$

$A\vec{v} = \vec{0}$ が非自明解 $\vec{v} \neq \vec{0}$ を持つ

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-\lambda) - (-3)\times 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$\Longleftrightarrow \lambda = 2, 3.$ C の固有値. eigen-value

$A\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow (C - \lambda I_2)\vec{v} = 0$

$A = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$

$C\vec{v} - \lambda I_2 \vec{v} = C\vec{v} - \lambda\vec{v}$

$\Longleftrightarrow \boxed{C\vec{v} = \lambda\vec{v}}$

$\underline{\lambda = 2}$

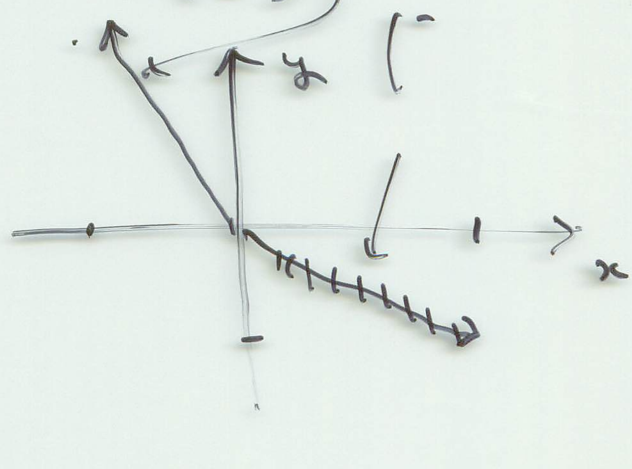
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow 3x + 2y = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow C\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく.



C の $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル.

eigen-vector

ドイツ語. eigentlich = original
‖
propre.

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x + y = 0$

$x = -y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |P| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - (-2) = -1 \neq 0.$

$\searrow$ Pは正則.

P:正則 $\iff \det(P) \neq 0$

$$\boxed{C\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1, \quad C\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2}$$

$$CP = C(\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = (C\vec{p}_1\ C\vec{p}_2)$$

$$= (2\vec{p}_1\ 3\vec{p}_2) = \underbrace{(\vec{p}_1\ \vec{p}_2)}_{= P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

楽性がこい

$$\boxed{(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + \cdots + c_n\vec{p}_n}$$

$$C = C\underbrace{PP^{-1}}_{= I_2} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$CP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

正則.

Cの対角化
diagonalization

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ 0 & b\beta \end{pmatrix}}$$

$$C^2 = C \cdot C = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}P}_{= I_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = P\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{= I_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$C^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & \underbrace{ab+bd}_{= b(a+d)} \\ \underbrace{ac+dc}_{= c(a+d)} & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc) I_2$$

定理 ケーリー・ハミルトン.

$$A^2 - (a+d)A + \det(A) I_2 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 - 5C + 6I_2 = O_2$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A - (a+d)A$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ \underset{c}{a} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & d^2+bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = (bc-ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(a_1, a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

定理 $A^2 - (a+d)A + \underset{\underset{ad-bc}{\shortparallel}}{\det(A)}\, I_2 = O_2$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 - 5C + 6I_2 = O_2$$

特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+6=0 \iff \lambda=2,3$

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \end{cases}$$

$$a_{n+1}-3a_n=2^n(a_1-3a_0)$$

$$-)\ a_{n+1}-2a_n=3^n(a_1-2a_0)$$

$$-a_n=2^n(a_1-3a_0)-3^n(a_1-2a_0)$$

$$C^2-5C+6I_2=O_2$$

$$C^2-3C=2C-6I_2$$

$$\begin{cases} C(C-3I_2)=2(C-3I_2) \\ C(C-2I_2)=3(C-2I_2) \end{cases}$$

$$C\cdot\underbrace{C(C-3I_2)}_{=\,2(C-3I_2)}=2C(C-3I_2)$$

$$=2^2(C-3I_2)$$

$$\begin{cases} C^n(C-3I_2)=2^n(C-3I_2) \\ C^n(C-2I_2)=3^n(C-2I_2) \end{cases}$$

$$-C^n=2^n(C-3I_2)-3^n(C-2I_2)$$

$$\boxed{C^n=3^n(C-2I_2)-2^n(C-3I_2)}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して ~~A^nを~~ 対角化して

A^n を求めよ.

$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$ と書く.

(i) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を解く.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ 0 & b\beta \end{pmatrix}$$

対角行列

$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

(1) $|A - \lambda I_2| = 0$ をみたす λ を求めよ.

(2) (1)の λ に対して

$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ をみたす $\vec{v} \neq \vec{0}$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ

$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$ をみたす P を求めよ.