• 行列のかけ算.

• 2×2 の逆行列 etc.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z \\ 0\cdot x + \lambda\cdot y + 0\cdot z \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \\ z \end{pmatrix}$$

---

m行n列 $\qquad\qquad$ a_{ij} i行j列

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} & \text{1行} \\ \quad\quad\quad\quad \text{2列.} & \end{array}$$

$$= (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$$ 列ベクトル表示.

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{pmatrix}$$ 行ベクトル表示.

$\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}\ \mathbb{d}\ \mathbb{e}\ \mathbb{f}\ \cdots\cdots$

Black Board
Boldface

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1 \ b_1 \ c_1} \\ \boxed{a_2 \ b_2 \ c_2} \\ \boxed{a_3 \ b_3 \ c_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$

列ベクトル表示.

$$= \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}}$$

$$\boxed{(\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}}$$

$$\begin{array}{cc} & 1列 \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

2行. a_{ij} i行j列

$m \times n$ 行列

m行, n列

$$= (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$$

列ベクトル表示.

$\vec{a}_j$ m次元ベクトル

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{pmatrix}$$

行ベクトル表示.

Black Board Boldface

$\mathbb{B}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{E}$ ....

m×n 行列

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} \\ \text{1列} \quad \text{2列} \quad\quad \text{n列}\end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n}_{\text{m次元ベクトル}}$$

m× n 行列

times

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^m$

$$= \begin{array}{c} i \end{array}\begin{pmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \end{pmatrix}$$

第i成分

$$\begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^m \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

m次元列ベクトル全体の集合.

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = A$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

3 × 3 　　　 3 × 2

$$= \begin{pmatrix} A\vec{x} & \boxed{A\vec{y}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} & \boxed{y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}} \end{pmatrix}$$

↑ 第1列 　　　 ↑ 第2列.

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad m \times n \qquad \begin{array}{c} \\ m \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}}_{n}$$

$$= \underbrace{x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n}_{\in \mathbb{R}^m} \qquad \vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$$

m次元数ベクトルの全体の集合

$$= x_1 \begin{pmatrix} \\ a_{i1} \\ \\ \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \\ a_{i2} \\ \\ \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \\ a_{in} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \boxed{x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \cdots + x_n a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{成分}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$$

$$\parallel$$

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

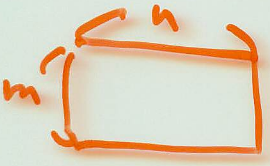
Aのi行

行列 × 行列

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \cdots \vec{a}_n)$ $m \times n$ $\vec{a}_1, \cdots \in \mathbb{R}^m$

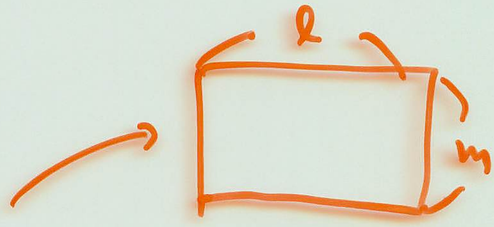
$B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_l)$ $n \times l$ $\vec{b}_1, \cdots \in \mathbb{R}^n$

$m \times n$

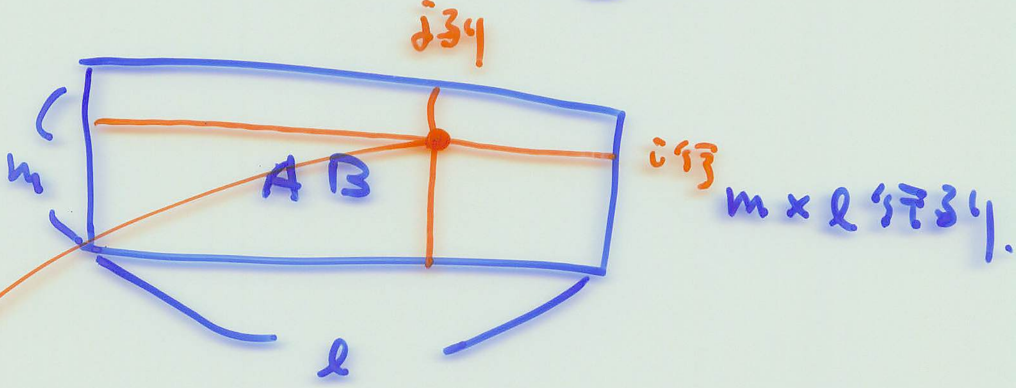


$A\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$

n次元ベクトル



$AB = (A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2 \cdots A\vec{b}_l)$



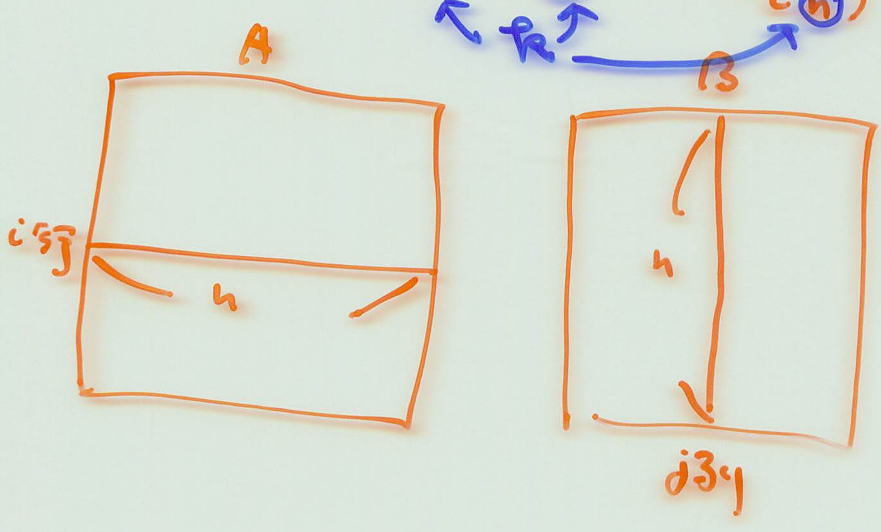
$m \times l$ 行列.

c_{ij} = (AB の i行 j列)

= $A\vec{b}_j$ の第i成分

$= (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

k



まとめ

A $m \times n$ $\qquad$ B $n \times l$

$$
\begin{array}{c c}
 & \\
i\text{行目} & \begin{pmatrix} & & \\ \hline & \vec{a}_i & \\ \hline & & \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
j\text{列目} \\
\begin{pmatrix} & \Big| & \\ & \vec{b}_j & \\ & \Big| & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$1, \cdots, m$ $\qquad$ $j : 1, \cdots, l$

$$
= \begin{array}{c c}
\begin{array}{c} j\text{列目} \\ \begin{pmatrix} & | & \\ - & \vec{a}_i \vec{b}_j & - \\ & | & \end{pmatrix} \end{array} & i\text{行目}
\end{array}
$$

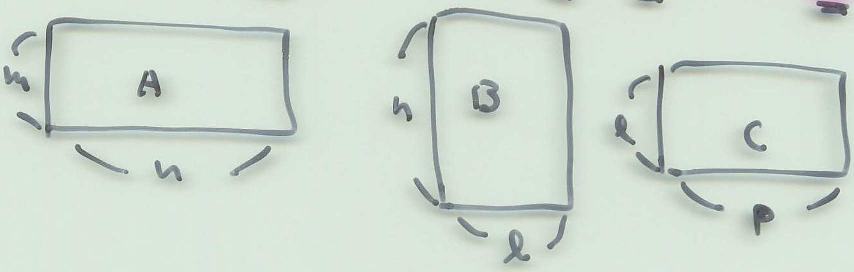
AB は $m \times l$

$$
= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}
$$

結合則

$A : m \times n \qquad B : n \times l \qquad C : l \times p$



$(AB)\,C \longrightarrow m \times p$

$\underset{=}{m \times l} \quad \underset{=}{l \times p}$

$A\,(BC) \longrightarrow m \times p$

$m \times n \quad n \times p$

定理 $(AB)C = A(BC)$ → ABC と表示できる

復習 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$|A| = ad - bc$

A の行列式 (determinant)

1° $\boxed{\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

注 $ad - bc \neq 0$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

クラメールの'公式'

2° non-trivial solution

$|A| = 0 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ と なる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在する

非自明解

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 4x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$$ が非自明な解を持つ条件

行列表示.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5$$
$$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$\boxed{\lambda = -1 \text{ または } 5}$

続き

$\lambda = 5$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

→ 非自明解の全て.

$\lambda = -1$

$x = -y$.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

$y = -x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

単位行列

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 0} \\ 0 \ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$I_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 0 \ 0} \\ \boxed{0 \ 1 \ 0} \\ \boxed{0 \ 0 \ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$I_2, I_3, \cdots$ 単位行列.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A - \lambda I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{I_2}$$

$$(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \underbrace{I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \vec{0}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

これが
非自明解をもつ
取るのは $\lambda = 5, -1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値

$$\boxed{A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

計算など

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$$

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2)$$

$$= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$

$AP = P\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$

逆行列

ちるだ tilde

$A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\quad \tilde{A} = \begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$A\tilde{A} = ?$

$\tilde{A}A = ?$

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}}$$

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}}$$

$$= (ad-bc)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

まとめると

$|A|$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \boxed{(ad-bc)}\, I_2$$

$ad-bc \neq 0$ のとき.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_2$$

$\boxed{A^{-1} : A\text{ の逆行列}}$

来週 補足 4°を話す.

$$\boxed{AP = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}} \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$|P| = 1\times(-1) - 2\times 1 = -3 \neq 0$$

逆行列

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad PP^{-1} = P^{-1}P = I_2$$

$$(AP)P^{-1} = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\| $$

結合法則

$$A(PP^{-1}) = AI_2 = A$$

inverse

$$\boxed{A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = A}$$

$$A = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

Aは「対角化」された。

$$A^2 = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}P}_{= I_2}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^2 = P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^3 = \boxed{P\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix}P^{-1}}\,\boxed{P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}}$$

$$= A^2 \cdot A, \qquad P^{-1}P = I_2$$

$$= P\begin{pmatrix}5^2 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix}5^3 & 0\\ 0 & (-1)^3\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

I

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \\ z & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \\ z & \gamma \end{pmatrix}$$

$$1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \\ z & \gamma \end{pmatrix}$$

II

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して逆行列 A^{-1} を求めよ.

III

$$A = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$$ とする

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ が非自明解を持つ λ を求めよ.
