

ちくま新書「数式の魔法」730 700円

Order!

keep in order!

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & (1) \\ cx + dy = \beta & (2) \end{cases}$$

2式相減 (1) $\times d$ - (2) $\times b$

$$\begin{aligned} adx + bdy &= \alpha d \\ -) \quad bcx + bdy &= \beta b \\ \hline (ad - bc)x &= \alpha d - \beta b \end{aligned}$$

$ad - bc \neq 0 \quad a \neq c$

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}$$

coefficient

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$
$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

1行
2列

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

+

行列式
determinant

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

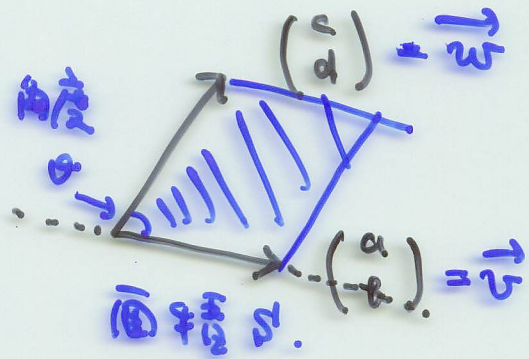
1行
2列

图 4-1

图 4-1

$$= ac + bd$$

$$= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos \theta$$



$$S = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin \theta$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$\vec{v}$ 的模长

norm

norm

$$= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sqrt{1 - \frac{(\vec{w} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{w} \cdot \vec{v})^2}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$\uparrow \quad \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|$$

图 4-1

$$= \left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right|$$

行列式的绝对值

12) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

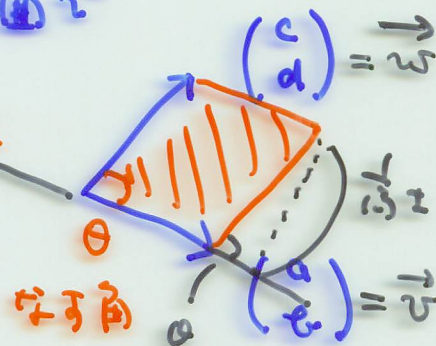
$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= ac + bd$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

2D plane

Area S'



Magnitude

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$S = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

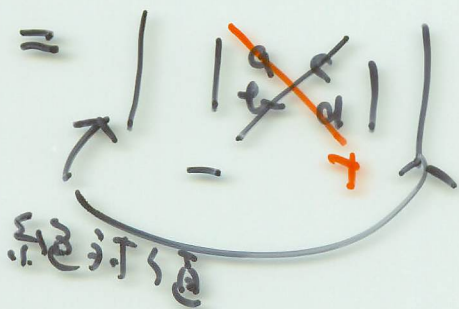
$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|$$



Area of the parallelogram

定理 2.1

$$\alpha = \beta = 0 \text{ の場合 } \Sigma \text{ 次 } \Sigma \text{ 次}$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$ 自明解
trivial solution

Σ 次 Σ 次

$$ax + by = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ とする}$$

法線 $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

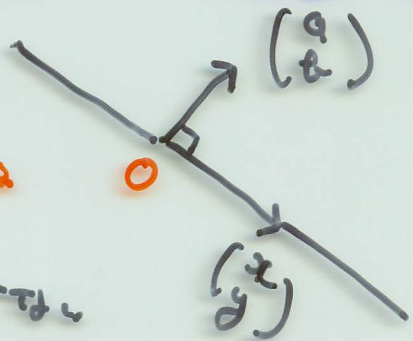
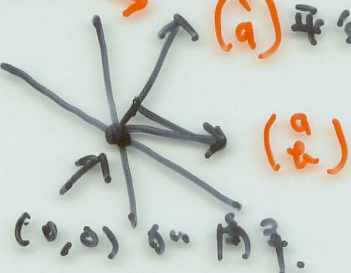
$(0, 0) \text{ は解}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は垂直に
法線

(1174)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

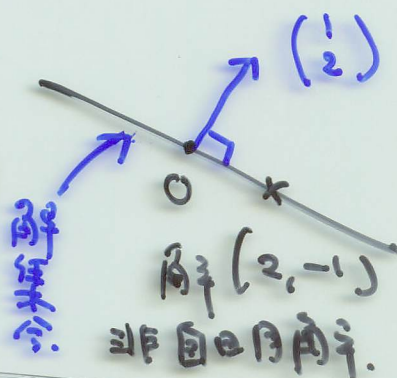
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 平行 $\vec{n}$



$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 \times 2 = 0$$



定理

$$\begin{cases} ax + by = 0 & (1) \\ cx + dy = 0 & (2) \end{cases}$$

Σ 次 Σ 次

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \iff$$

AND

(1) $\vee$ (2) は
非自明な解あり

$$\textcircled{a} (T_0) \Rightarrow (T_1) \equiv \text{not}(T_2) \Rightarrow \text{not}(T_0)$$

対偶

$$\text{not}(T_1) \quad \left| \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right| \neq 0 \quad \text{前提} \quad ad - bc \neq 0$$

$$\text{75x-11} \quad x = \frac{\left| \begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right|} = 0, \quad y = \frac{\left| \begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right|} = 0$$

$$\text{自由変数解} \quad x=y=0 \quad \text{前提} \quad \text{not}(T_0) \text{ 成立}.$$

On suppose given ...
 $(T_1) \equiv \text{固定} \quad ad - bc = 0.$

注意 $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$

- $x=b, y=-a$ は解
- $x=d, y=-c$ は解.

• $(a, b) \neq (0, 0) \leadsto x=b, y=-a$ は
非自明解.

• $(c, d) \neq (0, 0) \leadsto x=d, y=-c$ は
非自明解.

• $ax+by$ の場合

$$a=b=c=d=0 \leadsto$$

全 (x, y) が解.

$(0, 0)$ 以外の全 (x, y) は自明解.

134 $\in \mathbb{R}$ 行

134. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1's \\ 2's \end{matrix}$

$2 = \mathbb{R}$ 行 134.

column.
row

$$\begin{bmatrix} w \\ k \end{bmatrix}$$

1st row
(134)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array} \right) \text{ 行 134.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix} \leftarrow 0x + y.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x + 0y \\ 0x + \lambda y \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} 0x + 1y \\ 1x + 0y \end{matrix}$$

行和列

$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{d} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1\text{st} \\ 2\text{nd} \end{matrix}$$

234.

row
column

行列.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

↕

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array} \right) \text{ 增广矩阵.}$$

234 334.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{\lambda} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

$$0x+1y$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$1x+0y$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$0x+1y$$

$$0x+1y$$

$$1x+0y$$

3 = 2 正 3 行 3 列

行 3 列

2 行

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3 行

a_{ij}

行 3 列

3 = 2 5 3 4 234. 44. 51

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

① $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{x, y, z\}$ として

②

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 4x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1$ のとき $x = 0, y = 0$ となる。
 $\lambda = 3$ のとき $x = 0, y = 0$ となる。

$\lambda = 1, 3$

$\lambda = 1, 3$