

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & x & x \\ 0 & 1-x^2 & x-x^2 \\ 0 & x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

1349 余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + b \\ a \end{vmatrix}$$

1379 余因子展開

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x^2 & x-x^2 \\ x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (1-x)(1+x) & x(1-x) \\ x(1-x) & (1-x)(1+x) \end{vmatrix}$$

$(1-x) \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix}$

$= (1-x) \begin{pmatrix} x \\ 1+x \end{pmatrix}$

$$= (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1+x & x \\ x & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \{ (1+x)^2 - x^2 \}$$

$$= (x-1)^2 (2x+1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} \text{ 可逆 } \Leftrightarrow x \neq 1 \quad \cancel{x \neq -\frac{1}{2}} \\ x \neq -\frac{1}{2}.$$

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 - (\lambda-3)^2 & 2 + 2(\lambda-3) \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 - 2(\lambda-3) & \lambda-6 + 4 \end{vmatrix}$$

2 行  $\times \{-(\lambda-3)\}$   $\Sigma$   
1 行  $\rightarrow 0023$

2 行  $\times (-2)$   $\Sigma$   
3 行  $\rightarrow 0123$

2 行  $\rightarrow 131$

$(-1)^{2+1} = (-1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -(\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-2) \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

134 行  $\rightarrow$  展 (1)

$$= - \textcircled{1} \begin{vmatrix} -(\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-2) \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2 (\lambda-8)$$

$A : n \times n$  正則行列.

3

$$A : \text{正則} \iff \det(A) \neq 0 \iff \text{斉次方程式の解全体} \\ \iff \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n ; A\vec{x} = \vec{0} \}$$

$$\iff (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}) \iff \ker(A) = \{ \vec{0} \}$$

斉次方程式は 0 以外の解を持たない.

homogeneous equation

$$\iff \text{rank}(A) = n$$

$$A \rightarrow \dots \rightarrow I_n$$

行基本変形

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = 0 \iff \lambda = 2 \\ \text{または } \lambda = 8$$

$$(\lambda I_3 - A) \vec{x} = \vec{0} \text{ には非自明な解がある.}$$

$$\lambda = 2$$

$$\left( \begin{array}{c} \lambda \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) I_3 - A \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行变换}} \dots \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(2I_3 - A) \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

$$= \alpha \in \ker( ) \text{ 的基是}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是基 2 个 3 个

$$\ker(2I_3 - A) \text{ 的基 } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

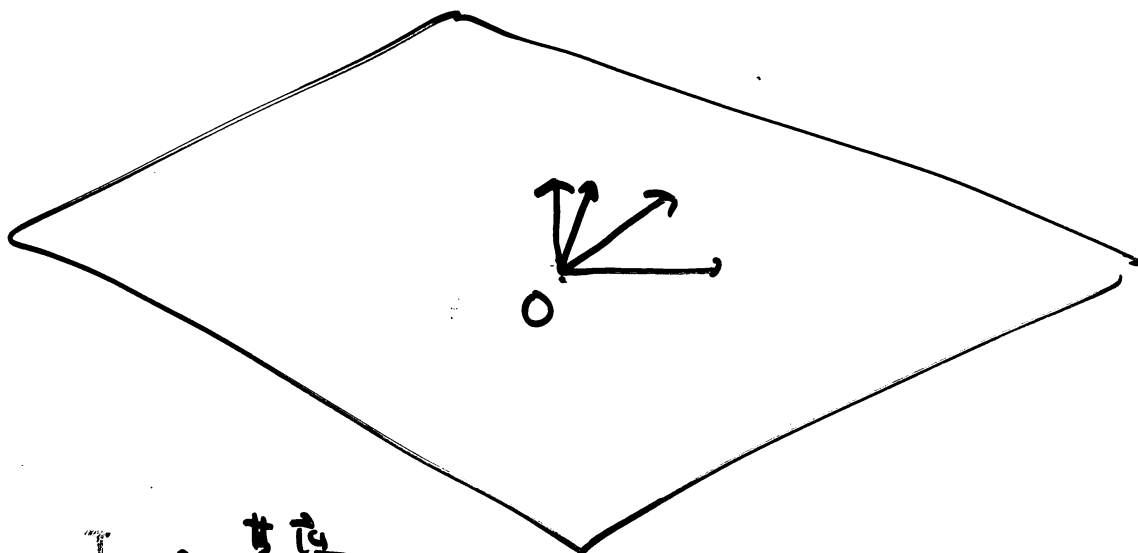
2 个 3 个 基是 3 个  
De plus M. neow

$$y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{所以 } y = z = 0 \text{ 的基是 2 个}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ 是基 2 个 3 个 基是 3 个}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ 是基 2 个 3 个 基是 3 个}$$



$I_n$  基底

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$

$\lambda = 8$  である

$$8I_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \boxed{0 & 0 & 0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{ker}(8I_3 - A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

∴  $\text{ker}(\quad)$  は  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  の 3 倍のベクトル。

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  は基底となるから 12 月 13 日。

$$\vec{v}_1 \neq \vec{0} \quad c\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow c = 0$$

$\in \mathbb{R}$

$A, B: 3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$AB \in 3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$$

$$A(\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$$

$$AB = (A\vec{e}_1 \quad A\vec{e}_2 \quad A\vec{e}_3) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & A\vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{e}_1 = b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + b_{31}\vec{e}_3$   
 $A\vec{e}_1 = \vec{a}_1$   
 $A\vec{e}_2 = \vec{a}_2$   
 $A\vec{e}_3 = \vec{a}_3$

$$= \sum_{i=1}^3 b_{i1} \begin{vmatrix} \vec{a}_i & A\vec{e}_2 & A\vec{e}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \\ k=1,2,3 \\ i \neq j, j \neq k, k \neq i}} b_{i1} b_{j2} b_{k3} \begin{vmatrix} \vec{a}_i & \vec{a}_j & \vec{a}_k \end{vmatrix}$$

$T_1 \cap T_2 \cap T_3$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{pmatrix} = e_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_{11} \vec{e}_1 + e_{21} \vec{e}_2 + e_{31} \vec{e}_3$$

$\vec{e}_i$  : 標準基底ベクトル

$$\begin{vmatrix} \lambda \vec{a} + \mu \vec{e} & \vec{e} & \vec{a} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{e} & \vec{a} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{e} & \vec{a} \end{vmatrix}$$

$$A \vec{e}_1 = e_{11} A \vec{e}_1 + e_{21} A \vec{e}_2 + e_{31} A \vec{e}_3$$

$$= e_{11} \vec{a}_1 + e_{21} \vec{a}_2 + e_{31} \vec{a}_3$$


---

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_3 & \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_3 & \vec{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix} = \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_2 & \vec{a}_1 & \vec{a}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{a}_1| &= -|\vec{a}_2 \vec{a}_1 \vec{a}_3| \\
 &= |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3| \\
 &= \det(A) \quad \pm 1
 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}_i \vec{a}_j \vec{a}_k| = \det(A) \times \text{sgn}(i, j, k)$$

$$i \neq j, j \neq k, k \neq i \quad \text{sign}$$

$$|\vec{a}_1 \vec{a}_3 \vec{a}_2| = -|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3|$$

$$\text{sgn}(132) = -1$$

$$|AB| = \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k \\ k \neq i}} b_{i1} b_{j1} b_{k1} \text{sgn}(i, j, k) \det(A)$$

||  
det(13)

$$\det(AB) = \det(A) \det(13)$$

$$A: \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

$$AX = I_3 \leadsto \det(A) \det(X) = \det(I_3) = 1$$

$$\leadsto \det(A) \neq 0$$

$$\det(AB)$$

$$\det(A) \operatorname{sgn}(ijk)$$

$$= \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k \\ k \neq i}} l_{i1} l_{j1} l_{k1} \left( \vec{a}_i \vec{a}_j \vec{a}_k \right)$$

$$\det(B)$$

$$= \left[ \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k \\ k \neq i}} l_{i1} l_{j1} l_{k1} \operatorname{sgn}(ijk) \right] \times \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}$$

$$(-) l_{21} l_{12} l_{33}$$

$$i=2 \quad j=1 \quad k=3$$

$$\operatorname{sgn}(213) = -1$$

$$|\vec{a}_2 \vec{a}_1 \vec{a}_3| = (-) |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3|$$

$$\operatorname{sgn}(213)$$

連立1次元方程式.

1次元独立, 部分空間の基底.

$I_m(A)$ ,  $\text{rank}(A)$

~~正射影系~~, 勾当ユニット  
正射影系.

行列式 (1次元) とその応用

→ 連立1次元の計算.