行列式の応用.

クラメール.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = ad - bc$$

右辺　非斉次項

non-homogeneous term

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}} \end{vmatrix}}{|A|}$$

クラメールの公式.

3変数の場合.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \alpha_1 & \cdots ① \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \alpha_2 & \cdots ② \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \alpha_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times c_2$ − ② $\times c_1$

$$\begin{array}{rl} & a_1 c_2 x + b_1 c_2 y + \cancel{c_1 c_2 z} = \alpha_1 c_2 \\ -) & a_2 c_1 x + b_2 c_1 y + \cancel{c_1 c_2 z} = \alpha_2 c_1 \\ \hline & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y + 0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots ③$$

① $\times c_3$ − ③ $\times c_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots ②$$

② $\times c_3$ − ③ $\times c_2$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots ①$$

① $\times b_1$ − ② $\times b_2$ + ③ $\times b_3$ $= 0$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_1 & c_1 \\ b_2 & \alpha_2 & c_2 \\ b_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

≠ 0 とする.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$

と仮定.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

クラメール.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

1列の余因子展開

相異なる2つが等しいと $= 0$

$$|\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}| = 0$$

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ 3次正方行列

関孝和

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\alpha}$

クラメールの公式　$\det(A) \neq 0$ のとき

$$x = \frac{|\boxed{\vec{\alpha}}\ \vec{b}\ \vec{c}|}{\det(A)}, \quad y = \frac{|\vec{a}\ \boxed{\vec{\alpha}}\ \vec{c}|}{\det(A)}$$

$$z = \frac{|\vec{a}\ \vec{b}\ \boxed{\vec{\alpha}}|}{\det(A)}$$

大前提.

系　$\vec{\alpha} = \vec{0}$ のとき.　$\boxed{\det(A) \neq 0 \text{ とする.}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

証明　$y = \dfrac{|\vec{a}\ \vec{0}\ \vec{c}|}{\det(A)} = 0$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

定理　$\det(A) = 0 \Rightarrow$ ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{x} = \vec{0}$

$\det(A) = 0$ のとき.

ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\boxed{\det(A) \neq 0 \iff (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})}$$

$\iff A$: rank 3

$\iff A$: 正則

$\iff \mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\} \iff \mathrm{Im}\,A = \mathbb{R}^3$

行基本変形

(I) $i \neq j$　i行とj行を交換.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}$$

P: 対応する基本行列.

$$|PA| = -|A|.$$

$$\det(A) \underset{\neq 0}{=} 0 \iff \det(PA) \underset{\neq 0.}{=} 0$$

(II) i行をλ倍 $(\lambda \neq 0)$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ a_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

$|PA| = \lambda |A|$ を得る.

$$\det(A) \underset{\neq 0}{=} 0 \iff \det(PA) \underset{\neq 0.}{=} 0$$

(III) $i \neq j$　i行のλ倍をj行に加える.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

$$|PA| = |A|$$

まとめ　P: 基本行列.

$$\det(PA) = 0 \iff \det(A) = 0$$
$$\neq 0 \qquad\qquad \neq 0$$

A : 3×3.

rank$(A) = 3$

行基本変形

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$\det(A) \neq 0$　　　1

$\det(I_3) = 1 \neq 0$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff I_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

・ $(A\vec{x} = \vec{0})$ に 非自明解 なし.

---

rank$(A) = 2$.

$\det(A) = 0$

$$A \to \cdots \to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(*) = 0$

noter bien

N.B.

上三角

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

$$z\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim\ker(A) = 1$

$\boxed{}$ の場合.

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + \alpha z = 0 \\ y + \beta z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha z \\ -\beta z \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が非自明解.

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A \\ \shortparallel \\ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \end{matrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x \quad + \alpha z = 0 \\ \quad y + \beta z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha z \\ -\beta z \\ z \end{pmatrix} = z\boxed{\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\ker(A)$の基底とできる

$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が…非自明解.

$A\vec{v} = \vec{0}$ の

$\dim \ker(A) = 1.$

$\dim \mathrm{Im}(A) = 2$

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると

$\vec{a}, \vec{b}$ を基底と できる

$\mathrm{rank}(A) = 2$

$\det(A) = 0$

$A\vec{v} = \vec{0}$ に非自明解有り

$\dim \ker(A) = 1$

$\dim \mathrm{Im}(A) = 2$

rank(A) = 1

$$\det(A) = 0 \nearrow A \to \cdots \to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \det(*) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{}$ の場合.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x + \alpha y + \beta z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y - \beta z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とする

Im(A) にある

基底を $\vec{a}$ にとれる

$$= y\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$*_{\circ}$

Ker(A) の基底　　Ker(A) = 2次元.

$A\vec{v} = \vec{0}$ に

非自明解あり).

rank(A) = 0　　$A = O_3$　　任意の $\vec{x}$ に対して $A\vec{x} = \vec{0}$

Ker(A) = $\mathbb{R}^3$

$\mathrm{rank}(A) = 1$

$\det(A) = 0$

$\dim \ker(A) = 2 \qquad = 3 - 1$

$\dim \mathrm{Im}(A) = 1$

$\mathrm{rank}(A) = 0 \qquad A = O_3.$

$\det(O_3) = 0$

任意的 $\vec{x}$ [illegible]

$A\vec{x} = O_3\vec{x} = \vec{0}$

$\rightsquigarrow \ker(O_3) = \mathbb{R}^3$ = 维 3.

$\mathrm{Im}(O_3) = \{\vec{0}\}$ = 维 0

En résumé

$A : 3 \times 3.$

- **rank$(A) = 3$.**

  $A \to \cdots \to I_3.$

  $\det(A) \neq 0$

  $\left(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \right)$

  正則

- **rank$(A) < 3$**

  $\det(A) = 0$

  ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対し $A\vec{x} = \vec{0}$.

  正則でない

正則性

$A \to \cdots \to I_3$

行基本変形.

$P = \boxed{P_l \cdots P_2 P_1} \cdot A = I_3 \rightsquigarrow PA = I_3$

正則.

正則.

P : 基本行列 : 正則

正則 × 正則 = 正則

$$\downarrow P^{-1}.$$

$$I_3 = P^{-1} P A = P^{-1} I_3$$

$$\downarrow$$

$$A = P^{-1}.$$

<u>A : 正則</u>

(正則)$^{-1}$ = 正則.

$(A^{-1})^{-1} = A.$

$A\vec{x} = \vec{0}$ とする. $\rightsquigarrow$ $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0}$

$\boxed{A : \text{正則とする}}$

$$\downarrow$$

$$\vec{x} = \vec{0}$$

正則性質

① $\mathrm{rank}(A) = 3 \Longrightarrow A : 正則$

$A \to \cdots \to I_3$

行基本変形

$$\underbrace{P_l \cdots P_2 P_1}_{P} A = I_3 \rightsquigarrow PA = I_3$$

P : 正則

P_j : 基本行列

↓

正則

正則 · 正則 = 正則

$(正則)^{-1} = 正則$

$PA = I_3$

$\downarrow P^{-1}$

$P^{-1}PA = P^{-1}I_3$

$A = P^{-1}$

$\rightsquigarrow A : 正則$

---

② $A : 正則 \Longrightarrow (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

$A\vec{x} = \vec{0} \rightsquigarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0}$

$\rightsquigarrow \vec{x} = \vec{0}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda - 6 \end{pmatrix}$$

---

① $\det(\lambda I_3 - A)$ を計算.

② $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ である λ に対して

$\mathrm{Ker}(\lambda I_3 - A)$ の基底を求める.
