$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix} = 0$$

$2r \mathrel{+}= 1r \times (-2)$

$3r \mathrel{+}= 1r \times (-3)$

$$\begin{array}{rrr} 2 & 6 & 10 \\ -)\ 2 & 10 & 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 3 & 7 & 11 \\ -)\ 3 & 15 & 27 \\ \hline 0 & -8 & -16 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b + \lambda a_1 \\ c \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = 0$$

1列の余因子展開

$$\left| \vec{a} \;\; \lambda \vec{a} \right| = \lambda \left| \vec{a} \;\; \vec{a} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ \lambda b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \beta-\alpha & \cancel{\beta-\alpha}\ \gamma-\alpha \\ \boxed{0} & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

2 r + = 1 r $\times (-\alpha)$

3 r + = 1 r $\times (-\alpha^2)$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \beta-\alpha \\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \end{matrix}} & \begin{matrix} \gamma-\alpha \\ (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix}$$

$$(\beta-\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ \beta+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$ax^2 + bx + c = f(x)$$

$$(\alpha, A), \ (\beta, B), \ (\gamma, C)$$

を通る ~~2次関数~~ 二次式の係数を求める.

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = A \\ a\beta^2 + b\beta + c = B \\ a\gamma^2 + b\gamma + c = C \end{cases}$$

$$A := (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \leftarrow 3 \times 3.$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

<u>クラメールの公式.</u>

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} & \vec{c} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1列の展開

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-1) = 3$$

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 2 \\ -) & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 0 & 2 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & 1 & 3 \\ -) & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

II.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

x_3 pivotのない番号

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto A\vec{x}$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 ;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow B\vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = \alpha$ とおくと $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{つまり}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. 以上より

$\mathrm{Ker}(A)$ の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみとなる.

上の行基本変形から基本行列 $P_1, \cdots, P_\ell$ が存在して

$$P_\ell \cdots\cdots P_1 \; A = B$$

となる。 P_j : 正則だから $P = P_\ell \cdots P_1$ は正則

となる。これから

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff B\vec{x} = \vec{0}$$

が分かる。

Im(A) は？ $PA = B$ から $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_4)$ とおくと、
$B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_4)$

$$P\vec{a}_j = \vec{b}_j \quad (j = 1, \cdots, 4)$$

が分かる。従って、

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$$

が従う。これに P^{-1} をかけると

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

を得る。これから $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ は

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{4} x_j \vec{a}_j = (x_1 + x_3)\vec{a}_1 + (x_2 - x_3)\vec{a}_2 + x_4 \vec{a}_4$$

と $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ で表すことができる。

さらに $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ は 1次独立である。実際

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$$

とするとこの両辺に P をかけると

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_4\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ が従う。よって $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$

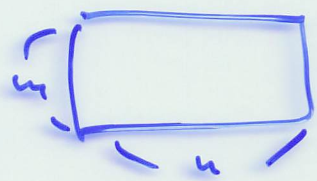
は Im(A) の基底である。

$$A \to \cdots \to B = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\ \ 0\ \ 1\ \ 0}}^{4} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{rank}(A) = 3$. Aの階数.

- $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A)$
- $\dim \mathrm{Ker}(A) =$ パラメーターの個数
  $=$ 変数の個数 $- \mathrm{rank}(A)$

A: $m \times n$ 行列.

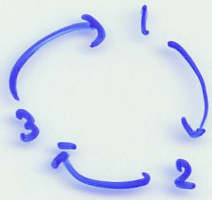


$\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A)$

$\dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

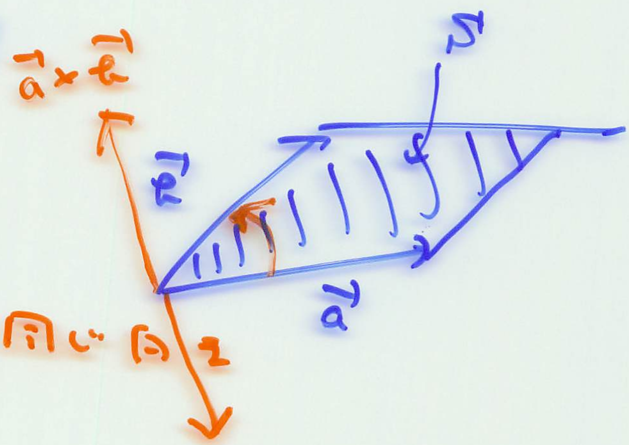


$$0 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = S$$



$\left(\begin{matrix} \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ と同じ向き} \end{matrix} \right.$

A, B : 2次正方行列.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

A : 正則. $\longrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

$$A \cdot A^{-1} = I_2.$$

$$\det(A A^{-1}) = \det(I_2) = 1$$

$$\det(A A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

$\det(A) = 0 \iff \left(\begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{0} \text{ となる} \\ \vec{x} \neq \vec{0} \text{ が有る} \end{array} \right)$

$\Updownarrow$

A : 正則 でない.

---

n次

A : 正則

$$A\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow A^{-1}A\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

I

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ が正則かどうか考える。
正則だったら逆行列を計算する。

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ———————

II.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(A)$ の次元を x によって場合分けをして求めよ.

III. (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ -a & 1 & b \\ -c & -b & 1 \end{vmatrix} = ?$