$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$= (\vec a_1 \cdots \vec a_4) \qquad \text{行基本変形} \qquad \| \; (\vec b_1 \cdots \vec b_4)$$

$$\mathrm{Im}(A) = \{ c_1 \vec a_1 + \cdots + c_4 \vec a_4 \,;\, c_1, \cdots, c_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ A\vec c \,;\, \vec c \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$\vec b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3\vec b_1 + 4\vec b_2 + \vec b_3$$

$$\vec a_4 = 3\vec a_1 + 4\vec a_2 + \vec a_3$$

- 行基本変形 ⟷ 基本行列を左からかける.
- P_j : 基本行列 : 正則. 逆行列あり.

$$P = \boxed{P_l \cdots P_2 P_1} \quad A = B \qquad P_j : \text{基本行列}.$$

P : 正則.

正則 × 正則 = 正則

$$PA = B \longleftrightarrow P(\vec a_1 \cdots \vec a_4) = (\vec b_1 \cdots \vec b_4)$$

$$P\vec a_j = \vec b_j \qquad \| \; (P\vec a_1 \cdots P\vec a_4)$$

$$\ker(A) = \{ \vec{c} \in \mathbb{R}^4 ; A\vec{c} = \vec{0} \}$$

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\vec{c} \longmapsto A\vec{c} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4$$

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B = PA$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff PA\vec{x} = B\vec{x} = \vec{0}$$

P^{-1} をかける

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = \alpha$ とおく.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ -4\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\ker(A)$ の基底.

$$P^{-1}\ \big\downarrow \quad \vec{e}_4 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} P\vec{a}_j &= \vec{e}_j \\ \vec{a}_j &= P^{-1}\vec{e}_j \end{aligned}}$$

$$P^{-1}\vec{e}_4 = P^{-1}(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

$$= 3P^{-1}\vec{e}_1 + 4P^{-1}\vec{e}_2 + P^{-1}\vec{e}_3$$

$$\leadsto \vec{a}_4 = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4$$

$$= \cancel{c_1\vec{a}_1}$$
$$(c_1 + 3c_4)\vec{a}_1 + (c_2 + 4c_4)\vec{a}_2 + (c_3 + c_4)\vec{a}_4$$

- Im(A) は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ で張られる.
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は1次独立.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は Im(A) の基底.

⇝ 3次元

$$\left(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0\right)$$

$0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 = \vec{0}$ 自明な1次関係.

自明な1次関係しかない…

例えば $c_2 \neq 0$.

$$\leadsto \vec{a}_2 = -\frac{1}{c_2}(c_1\vec{a}_1 + c_3\vec{a}_3)$$

P をかける.

$$\underbrace{c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3}_{= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{0} \leadsto c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

行列式

1列の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$+$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

−の項

I 3列に関する線形性

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix}$$

II 2列同じならば $=0$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{b} \end{vmatrix} = 0$$

III

$$|I_3| = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$= a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{=0} - a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{=0} + a_3 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= 0.$$

Ⅳ $\quad |\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}| = -|\vec{b}\ \ \vec{a}\ \ \vec{c}|$

注

$$|\vec{a}+\vec{b}\ \ \ \vec{a}+\vec{b}\ \ \ \vec{c}| \overset{\text{by Ⅱ}}{=} 0$$

$$= \underbrace{|\vec{a}\ \ \vec{a}\ \ \vec{c}|}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{by Ⅱ}} + |\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}| + |\vec{b}\ \ \vec{a}\ \ \vec{c}| + \underbrace{|\vec{b}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}|}_{\text{by Ⅱ}\ 0}$$

Ⅴ $\quad |\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}| = |\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}+\lambda\vec{a}|$

i列のλ倍をj列にたしても不変.
$i \neq j$

$$右 = |\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}| + \lambda\overbrace{|\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{a}|}^{=0} = 左$$

Ⅵ $\quad |A| = |{}^tA|$

Ⅱ $\rightsquigarrow$ Ⅱ$'$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\boldsymbol{a}} \\ \lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

$$左 \overset{t}{=} |\boxed{{}^t\boldsymbol{a}}\ \ \ {}^t(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})\ \ \ {}^t\boldsymbol{d}|$$

$$= |{}^t\boldsymbol{a}\ \ \ \lambda\,{}^t\boldsymbol{b}+\mu\,{}^t\boldsymbol{c}\ \ \ {}^t\boldsymbol{d}|$$

$$= \lambda\,|{}^t\boldsymbol{a}\ \ {}^t\boldsymbol{b}\ \ {}^t\boldsymbol{d}| + \mu\,|{}^t\boldsymbol{a}\ \ {}^t\boldsymbol{c}\ \ {}^t\boldsymbol{d}|$$

$$= \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

III'

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = 0$$

IV'

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}$$

V

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} + \lambda \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{2\ 1\ 1} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & 1 & 1 \\ - & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 0 & -3 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\cancel{1\ 2\ 1}$$

$$= - 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = - \{(-3)\cdot 1 - (-1)(-1)\}$$

$$= 4.$$

Ⅰ 次の行列式を計算

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Ⅱ
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$ に対し、

Ker(A) の基底を求めよ.

$= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 ; A\vec{x} = \vec{0} \}$