

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A|$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A)$$

1. 特征值的求法:

$$= (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

$\alpha \neq \beta$ 时

$$A \vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_1$$

$$A \vec{v}_2 = \beta \vec{v}_2$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, 线性无关.

$$P = (\vec{v}_1 \vec{v}_2)$$

存在可逆矩阵 P 使得

$$AP = (\alpha \vec{v}_1 \quad \beta \vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \quad \underline{\text{A 可对角化.}}$$

$$\alpha I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

α 为特征值时, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 为特征向量.

$$\Phi(\lambda) = |\lambda I_2 - \alpha I_2| = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \alpha)^2 \quad \alpha \text{ 为二重特征值.}$$

対角化できない行列がある。

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ は対角化できない。

$A: 2 \times 2$ 行列の行列式が 0 にならない。

$$A = P \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1}$$

$\sigma, \delta \neq 0$ である。 $P \cdot \lambda I_2 \cdot P^{-1}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det(\lambda I_2 - P \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1})$$

$$= \det(P(\lambda I_2 - \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix})P^{-1})$$

$$= \det(P) \det \begin{pmatrix} \lambda - \sigma & 0 \\ 0 & \lambda - \delta \end{pmatrix} \det(P^{-1})$$

$C, D: 2 \times 2$ 行列。

$$\det(CD) = \det(C) \det(D)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \det(PP^{-1})$$

$$= \det(I_2)$$

$$= 1$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - \sigma & 0 \\ 0 & \lambda - \delta \end{pmatrix}$$

よって

$$= (\lambda - \sigma)(\lambda - \delta)$$

$$A = P \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1} \text{ に対角化できない}$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \sigma)(\lambda - \delta)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ 可对角化 } \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ -1 & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)^2$$

可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$.

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = \alpha I_2$$

$\alpha \neq \alpha$ 正理, 行理, P 可存在.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

矛盾.

$\leadsto$ 可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$.

补充 $\Phi_A(\lambda) = \Phi_{PAP^{-1}}(\lambda)$

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

$\alpha \neq \beta \rightarrow$ 可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \beta$.

$\alpha = \beta \leadsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ 可对角化

补充

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$.

$\alpha = \beta$. 可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$.

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = \alpha I_2.$$

总结 $\alpha = \beta$, A : 可对角化 $\Leftrightarrow \alpha \neq \alpha$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

A: 固有値が複素数の場合

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 \rightarrow \text{固有値が重複する}$$

$$A \neq \alpha I_2$$

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \text{ となる } P \text{ が存在.}$$

A の Jordan 標準形

Exo 04

A, B: 2×2 正定値行列.

$$AB = BA$$

$$(A+B)^n = A^n + {}_nC_1 A^{n-1} B + {}_nC_2 A^{n-2} B^2 + \dots \\ \dots + {}_nC_k A^{n-k} B^k + \dots + B^n.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = (2I_2 + J)^n \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2I_n \cdot J = J \cdot 2I_n = 2J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2^n I_2 + {}_nC_1 2^{n-1} I_2 \cdot J \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + {}_nC_2 2^{n-2} I_2 \underbrace{J^2}_{=0} + \dots \quad I_n^k = I_n$$

$$= 2^n I_2 + n 2^{n-1} J = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

$$17-1) \dots 1 \leq n \leq 2$$

$$\underbrace{(A - 2I_2)}_{B}^2 = O_2$$

$$A = 2I_2 + B$$

$$A^n = 2^n I_2 + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} B^2 + \dots$$

$B^2 = O_2$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{= O_2}$

$$= 2^n I_2 + n 2^{n-1} B$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \boxed{x + 3y - z = 0} \right\}$$

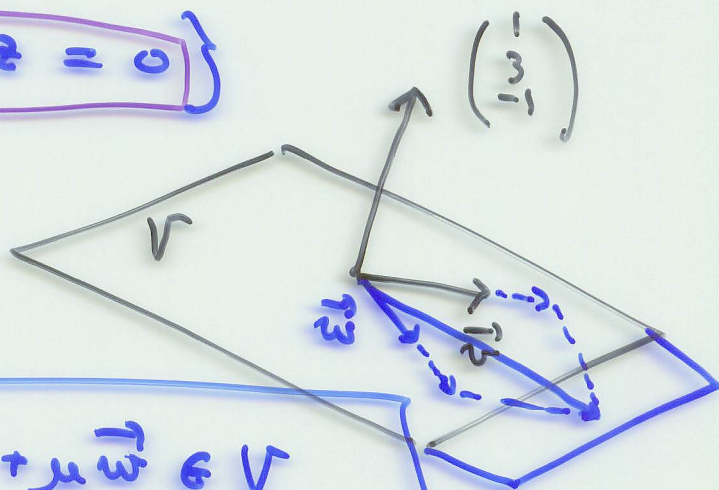
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in V}$$

V is $\mathbb{R}^3$ 部分空間

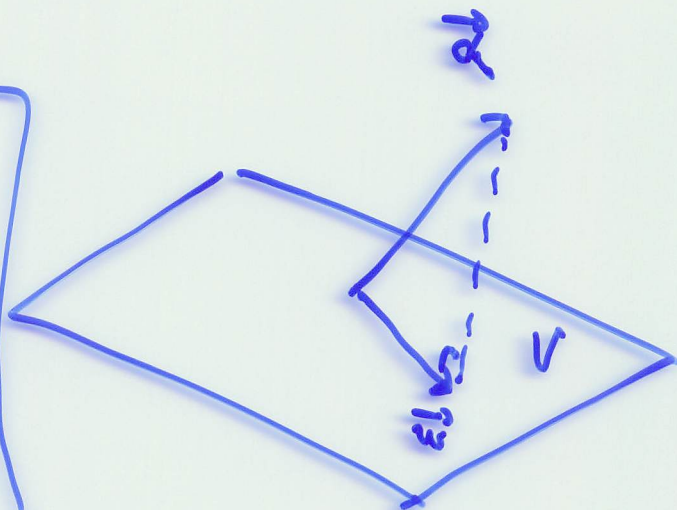
$$V \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V \text{ is } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ によって spanned by } \dots$$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} \in V \\ \vec{a} - \vec{w} \perp V \end{array} \right\}$$

$\exists \text{ 且 } \exists \vec{w} \in V \text{ s.t. } \vec{a} - \vec{w} \perp V$



$$V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\exists \text{ 且 } \exists \vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V \text{ s.t. } \vec{a} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \perp V$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \text{ 在 } V \text{ 上的正交投影为 } \vec{p}_1$$

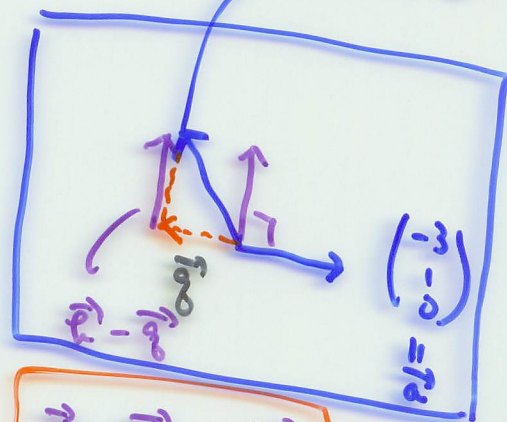
$$\vec{p}_1 = \frac{(\vec{a}, \vec{v}_1)}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$$

$$= \frac{1}{10} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \vec{a} - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 0 \\ 9/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \text{ 是 } V \text{ 的一组正交基}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \perp V$$

行基本変形

- ① $i \neq j$ i 行と j 行の交換
- ② $\lambda \neq 0$ i 行を λ 倍
- ③ $i \neq j$ i 行の λ 倍を j 行に+

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad w \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x+2y+2z+0w=-3. \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2r + = 1r \times (-2) \\ 3r + = 1r \times 1 \end{array}$$

$$2r \leftrightarrow 3r$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \leftarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \\ \leftarrow 4r + = 3r \times (-1) \end{array}$$

$$\downarrow 3r \times = \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{4r + = 3r \times (-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{pivot} \text{ 行 } z \text{ 行 } 3.$$

$$21r + = 21r \times (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$0x+0y+0z+0w=0$$

$$\begin{cases} x - 4z = -3 \\ y + 3z = 0 \\ w = 2 \end{cases}$$

$$z = \alpha \text{ とおす}$$

$$\begin{cases} x = 4\alpha - z \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \\ w = 2 \end{cases}$$

$$I \quad \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & -5 & -5 \\ 5 & 9 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{array} \quad \text{is not C.}$$

I