

11/8 1.5 2.1 角 7 8

I $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\therefore \exists T, \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } A = T \Lambda T^{-1}$ $\therefore$ 定理 2
用いて A^n を求める.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda-1)(\lambda-3)+1 = \lambda^2-4\lambda+4 \\ &= (\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

2^n あり. $\lambda^n \leq (\lambda-2)^2 \leq \dots$ とする. $\lambda=2$ とする.

$$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda-2)^2 + a\lambda + b \quad \dots \textcircled{1}$$

0.5

$$n\lambda^{n-1} = g'(\lambda)(\lambda-2)^2 + g(\lambda) \times 2(\lambda-2) + a \quad \dots \textcircled{2}$$

$\lambda=2$ とする, $\lambda=2$ とする.

$$\begin{cases} 2^n = 2a + b \\ n2^{n-1} = a \end{cases}$$

$\lambda=2$ とする. $a = n2^{n-1}$, $b = 2^n - n2^n = (1-n)2^n$

0.5 1.5. $\textcircled{1}$ $A \leq \lambda \leq 2$

$$A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_2$$

0.5 1.5.

(R1) $\lambda=2$ $\therefore \exists T, \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } A = T \Lambda T^{-1}$

$$A^2 - 4A + 4I_2 = O_2$$

0.5 1.5.

$$A(A-2I_2) = 2(A-I_2) \quad \dots \textcircled{3}$$

0.5 1.5. $\lambda=2$ とする. $\lambda=2$ とする.

$$A^n(A-2I_2) = 2^n(A-I_2)$$

0.5 1.5. $\lambda=2$ とする.

$$A^{n+1} - 2A^n = 2^n (A - 2I_2)$$

と見て両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{A^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{A^n}{2^n} = \frac{1}{2} (A - 2I_2)$$

と見ると、これは

$$\frac{1}{2^n} A^n = \frac{n}{2} (A - 2I_2) + I_2$$

と見ると

$$A^n = n 2^{n-1} (A - 2I_2) + 2^n I_2$$

と見ると。

補足 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A - 2I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

である。 $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = (A - 2I_2) \vec{p}_1$ と定めると

$$\begin{aligned} A \vec{p}_1 &= (A - 2I_2) \vec{p}_1 + 2I_2 \vec{p}_1 \\ &= \vec{p}_2 + 2\vec{p}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \vec{p}_2 &= (A - 2I_2) \vec{p}_2 + 2I_2 \vec{p}_2 \\ &= (A - 2I_2)^2 \vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 \\ &= \vec{0}_2 \vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2 \end{aligned}$$

↑
'T-11-1131412

$$\begin{aligned} 2) \quad A(\vec{p}_1 \vec{p}_2) &= (A\vec{p}_1 \quad A\vec{p}_2) \\ &= (2\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad 2\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と見ると。 $P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2)$ は正則

である。

実際, $c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \dots \textcircled{1}$

の両辺に $(A - 2I_2)$ をかけると

$$c_1 \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\Rightarrow (A - 2I_2) \vec{p}_1 = \vec{p}_2$,

$$(A - 2I_2) \vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2 \vec{p}_1 = \vec{0} \quad \text{「7」の2回}$$

$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ かつ $c_1 = 0$, $\textcircled{1} \Rightarrow$ したがって

$$c_2 \vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

と得られる, $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ かつ $c_2 = 0$ と得られる。 $\therefore$ したがって

$$(\textcircled{1} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0)$$

と示す。 LT かつ, したがって $P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2)$ が正則行列となる。

$$2\text{ である。} \quad AP = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ かつ}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と示す。 LT 。 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は A の Jordan 標準形と呼ばれる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2^2 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2^2 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 4 \cdot 2^3 & 2^4 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

と予想でき, 実際, 数学的帰納法で証明できる。

補足

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

にこの2は上々のように計算できる。AとBが交換可能な場合

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k A^k B^{n-k}$$

が成立する $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $J^2 = 0_2$ であり $T=J$ のとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n &= (2I_2 + J)^n \\ &= 2^n I_2 + {}_nC_1 2^{n-1} J + \sum_{k=2}^n {}_nC_k 2^{n-k} J^k \end{aligned}$$

$$= 2^n I_2 + {}_nC_1 2^{n-1} J$$

と計算できる。同様に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

より

$$(A - 2I)^2 = 0_2$$

が成立するから $B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり

$$A^n = (2I_2 + B)^n$$

$$= 2^n I_2 + {}_nC_1 2^{n-1} B + \sum_{k=2}^n {}_nC_k 2^{n-k} B^k$$

$$= 2^n I_2 + n 2^{n-1} B$$

と計算できる。

II $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; x + 2y - z = 0 \right\}$ の正規直交基底を求めよ.

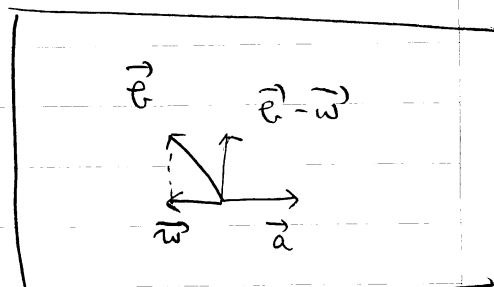
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と V は $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で表れる. $\vec{e}$ と $\vec{a}$ は

1. 正規直交基底. $\vec{w}$ は

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \\ &= \frac{-2}{5} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



2. 互に直交. $\vec{a}$ と $\vec{e} - \vec{w}$ は

$$\vec{e} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. 直交. $\vec{a}$ と $\vec{e} - \vec{w}$ が直交していることは簡単に確認できる.

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. 互に直交.